

# KINEMATIČKA I DINAMIČKA ANALIZA RAVNINSKOG MEHANIZMA

---

**Dragobratović, Ante**

**Undergraduate thesis / Završni rad**

**2022**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Split / Sveučilište u Splitu**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:228:151964>

*Rights / Prava:* [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-03-03**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of University Department of Professional Studies](#)



UNIVERSITY OF SPLIT



**SVEUČILIŠTE U SPLITU**  
**SVEUČILIŠNI ODJEL ZA STRUČNE STUDIJE**

Preddiplomski stručni studij Konstrukcijsko strojarstvo

**ANTE DRAGOBRA TOVIĆ**

**ZAVRŠNI RAD**

**KINEMATIČKA I DINAMIČKA ANALIZA  
RAVNINSKOG MEHANIZMA**

Split, veljača 2022.

**SVEUČILIŠTE U SPLITU**  
**SVEUČILIŠNI ODJEL ZA STRUČNE STUDIJE**

Preddiplomski stručni studij Konstrukcijsko strojarstvo

**Predmet:** Tehnička Mehanika II

**Z A V R Š N I R A D**

**Kandidat:** Ante Dragobratović

**Naslov rada:** Kinematička i dinamička analiza ravninskog mehanizma

**Mentor:** Dr. sc. Ado Matoković, prof. v. š. u trajnom zvanju

**Komentor:** -

Split, veljača 2022.

**REPUBLIKA HRVATSKA**  
**SVEUČILIŠTE U SPLITU**  
**Sveučilišni odjel za stručne studije**

**Studij:** Konstrukcijsko strojarstvo  
**Predmet:** Tehnička Mehanika 2  
**Nastavnik:** Dr. sc. Ado Matoković, prof. v. š. u trajnom zvanju

## **ZADATAK**

**Kandidat:** Ante Dragobratović

**Zadatak:** Kinematička i dinamička analiza ravninskog mehanizma

U radu je potrebno:

- ukratko opisati gibanja krutog tijela;
- napraviti kinematičku analizu zadanog mehanizma: za zadani mehanizam odrediti brzine i ubrzanja karakterističnih točaka u ovisnosti o kutu  $\varphi$ ;
- proračun napraviti u Excel-tablici i priložiti u radu;
- napraviti dijagrame brzine i ubrzanja klizača D i središta štapa BD C<sub>2</sub> u ovisnosti o kutu  $\varphi$  zadanog mehanizma;
- za zadani kut  $\varphi=60^\circ$  odrediti brzine i ubrzanja karakterističnih točaka koristeći parametarske jednadžbe gibanja te plan brzina i ubrzanja;
- napraviti dinamičku analizu zadanog mehanizma: za zadani mehanizam odrediti reakcijske sile u zglobovima u ovisnosti kuta  $\varphi$ , proračun napraviti u Excel-tablici;
- prikazati ovisnost reakcija sila u zglobovima u ovisnosti o kutu  $\varphi$ ; tu ovisnost prikazati odgovarajućim dijagramima.

## Sažetak

U uvodnim poglavljima su opisane osnove gibanja krutog tijela: translacija, rotacija i ravninsko gibanje. Zadani mehanizam je rastavljen na pojedinačne dijelove i određena su gibanja štapova i klizača. Vršiti se kinematička i dinamička analiza mehanizma. Za kinematičku analizu kao prva opcija proračuna je korišten koordinatni sustav. Pomoću sustava su izračunate parametarske jednadžbe, deriviranjem tih jednadžbi dobivene su formule za proračun brzina i ubrzanja karakterističnih točki. Provjera rezultata odrađena je metodom plana brzina i ubrzanja. Napravljen je vektorski zapis mehanizma, te podjela na dva štapa. Prvi štap ima rotacijsko gibanje dok drugi ravninsko gibanje. Jednadžbe za pojedine brzine i ubrzanja karakterističnih točki su izvedene pomoću mjerenja i zbroja vektora. Dinamička analiza je izvršena izračunom reakcijskih sila u ovisnosti o kutu  $\varphi$ . Za izračun je potrebno izračunati reakcije sila na klizaču D pa preko zglobova sve do kraja mehanizma s završetkom u zglobu A (slika 3.1). Usporedbom dvaju načina je omogućena veća točnost proračuna kao i fleksibilnost samog rada.

Ključne riječi: rotacija, gibanje, kinematika, dinamika, brzina, ubrzanje, sila....

## Summary (Kinematic and dynamic analysis of the plane mechanism)

The introductory chapters describe the basics of rigid body motion: translation, rotation, and plane motion. The default mechanism is disassembled into individual parts and the movements of the rods and sliders are determined. Kinematic and dynamic analysis of the mechanism is performed. For kinematic analysis, the coordinate system was used as the first calculation option. Parametric equations were calculated using the system, and by deriving these equations, formulas for calculating velocities and accelerations of characteristic points were obtained. Verification of the results was done by the use of velocity and acceleration plans. A vector notation of the mechanism was made, and the division into two rods. The first rod has a rotational motion while the second a plane motion. Equations for individual velocities and accelerations of characteristic points were made by using measurements and the sum of vectors.

The dynamic analysis was performed by calculating the reaction forces depending on the angle  $\varphi$ . For the calculation, it is necessary to calculate the force reactions on the slider D and over the joints all the way to the end of the mechanism ending in the joint A (Picture 3.1). By comparing the two methods, greater accuracy of the calculation is enabled and the flexibility of the work itself.

Keywords: rotation, motion, dynamics, speed, acceleration, sila....

**SADRŽAJ**

Sažetak .....	4
1. Uvod.....	9
2. Osnovna gibanja krutog tijela - kinematike .....	10
2.1. Translatorno gibanje krutog tijela.....	10
2.2. Rotacijsko gibanje krutog tijela.....	10
2.3. Ravninsko gibanje krutog tijela.....	12
3. Opis zadanog mehanizma .....	15
4. Kinematička analiza.....	17
4.1. Proračun brzina i ubrzanja pomoću parametarskih jednadžbi gibanja .....	17
4.2. Proračun brzina i ubrzanja korištenjem plana brzina i ubrzanja .....	23
5. Dinamika ravninskog gibanja krutog tijela.....	31
5.1. Jednadžbe ravninskog gibanja krutog tijela.....	31
6. Dinamička analiza zadanog mehanizma .....	32
6.1. Proračun sila u zglobovima mehanizma.....	32
7. Zaključak.....	40
Literatura .....	41
Prilozi .....	42

**Popis slika**

Slika 2.1 – Translatorno gibanje .....	10
Slika 2.2 – Rotacijsko gibanje.....	11
Slika 2.3 – Rastavljanje ravninskog gibanja .....	12
Slika 2.4 – Zbroj vektorskih komponenti brzine točke B .....	13
Slika 2.5 – Zbroj vektorskih komponenti ubrzanja točke B.....	14
Slika 3.1 – Skica zadanog mehanizma .....	15
Slika 3.2 – Skica štapa AB .....	15
Slika 3.3 – Prikaz ravninskog gibanja štapa BD .....	16
Slika 3.4 – Skica kretanja mehanizma .....	16
Slika 4.1 – Dužine štapova prikazane u koordinatnom sustavu.....	17
Slika 4.2 – Prikaz brzina i ubrzanja na štapu AB.....	24
Slika 4.3 – Prikaz brzina tijekom translacije i rotacije štapa BD.....	25
Slika 4.4 – Vektorski prikaz brzina $v_D$ (lijevo) i $v_{C_2}$ (desno).....	25
Slika 4.5 – Prikaz ubrzanja tijekom translacije i rotacije štapa BD .....	26
Slika 4.6 – Vektorski zbroj ubrzanja točke D(lijevo) i $C_2$ (desno) .....	27
Slika 4.7 – Dijagram brzine točke $C_2$ u ovisnosti o kutu $\varphi$ .....	29
Slika 4.8 – Dijagram brzine točke D u ovisnosti o kutu $\varphi$ .....	29
Slika 4.9 – Dijagram ubrzanja točke $C_2$ u ovisnosti o kutu $\varphi$ .....	30
Slika 4.10 – Dijagram ubrzanja točke D u ovisnosti o kutu $\varphi$ .....	30
Slika 5.1 – Ravninski sustav sila(lijevo) i sustav sveden na rezultantnu(desno) .....	31
Slika 6.1 – Prikaz sila na klizaču D.....	32
Slika 6.2 – Prikaz sila na štapu BD .....	33
Slika 6.3 – Prikaz sila na štapu AD.....	34
Slika 6.4 – Ovisnost sile u zglobu D o kutu $\varphi$ .....	36
Slika 6.5 – Ovisnost sile u zglobu A o kutu $\varphi$ .....	37
Slika 6.6 – Ovisnost reakcijske sile podloge na klizaču D o kutu $\varphi$ .....	37
Slika 6.7 – Ovisnost sile u zglobu B o kutu $\varphi$ .....	38



**Popis tablica**

Tablica 4.1 – Brzine pojedinih točaka u ovisnosti o kutu $\varphi$ .....	20
Tablica 4.2 – Ubrzanja pojedinih točaka u ovisnosti o kutu $\varphi$ .....	21
Tablica 6.1 – Vrijednosti sila zglobova u ovisnosti o kutu $\varphi$ .....	39

## 1. Uvod

Rad započinje sa spoznajom gibanja i reakcija tijekom kretanja mehanizma. Translacija, rotacija i ravninsko gibanje je određeno proučavanjem gibanja mehanizma u pogonu. Kinematička analiza mehanizma je odrađena pomoću usporedbe dviju metodi. Prva metoda je izračun brzina i ubrzanja karakterističnih točaka korištenjem parametarskih jednadžbi gibanja. Druga metoda je korištenje plana brzina i ubrzanja pri kojem u mjerilu nacrtani crteži daju veličine pojedinih brzina i ubrzanja. Također je moguće proračunati veličine pomoću vektorskog zbroja komponenti brzina i ubrzanja. Usporedbom je provjerena točnost rezultata kinematičke analize. Proučavanjem dinamičke analize izračunate su reakcije sila u zglobovima pojedinih dijelova. Pomoću rastavljanja zglobova i rješavanja jednadžbi u zglobovima kao zasebnim jedinicama dobivene su veličine svih sila u zglobovima. Veličine sila u ovisnosti o kutu  $\varphi$  su prikazane dijagramom.

## 2. Osnovna gibanja krutog tijela - kinematike

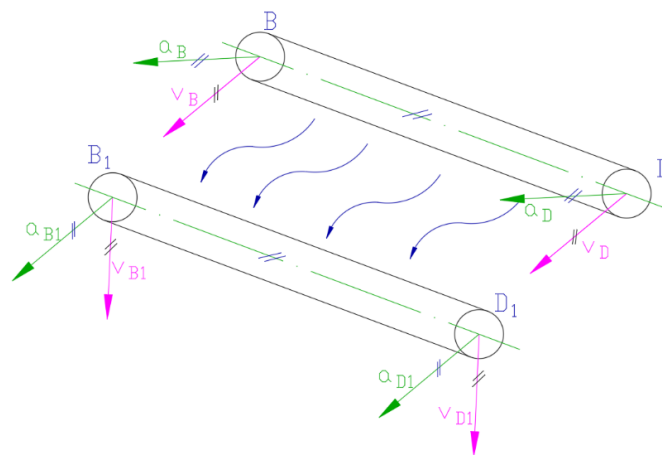
Kinematika krutog tijela se odnosi na elementarna gibanja koja su sastavni dio svakog mehanizma. Elementarna gibanja krutog tijela podijeljena su na rotacijsko i translatorno; pomoću ta dva gibanja moguće je pojasniti sva ostala gibanja krutih tijela [1].

### 2.1. Translatorno gibanje krutog tijela

Translatorno gibanje (slika 2.1) je gibanje pri kojem pravac koji prolazi kroz dvije po volji odabrane točke ostaje paralelan samom sebi pri završetku gibanja. Translacija krutog tijela može biti pravocrtna ili krivocrtna u ovisnosti o putanji samog tijela. Svaka točka tijela prilikom translacije ima istu putanju. Prilikom translatornog gibanja u svakom trenutku sve točke tijela imaju istu brzinu i ubrzanje (2.1-2.2).

$$v_B = v_D \quad (2.1)$$

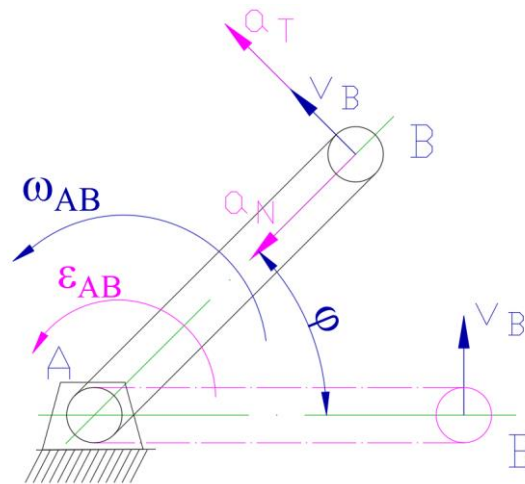
$$a_B = a_D \quad (2.2)$$



Slika 2.1 – Translatorno gibanje

### 2.2. Rotacijsko gibanje krutog tijela

Rotacija krutog tijela odvija se oko nepomične osi. Na slici 2.2 os okomita na ravninu slike koja prolazi kroz točku A naziva se os rotacije.



Slika 2.2 – Rotacijsko gibanje

Položaj tijela pri rotacijskom gibanju je određen *kutom rotacije*  $\varphi$ . Za određivanje mjere kuta rotacije moguće je zamisliti dvije ravnine koje prolaze kroz nepomičnu os, a kut između njih je *kut rotacije*  $\varphi$  (slika 2.2). U početku gibanja te dvije ravnine su u istom položaju, a u trenutku  $t$  tvore kut rotacije. Kut rotacije se izražava u radijanima. Funkcija *kuta rotacije*  $\varphi$  u *vremenskom intervalu*  $t$  se naziva zakon rotacije krutog tijela oko nepomične osi (2.3).

$$\varphi = \varphi(t) \quad (2.3)$$

*Kutna brzina tijela*  $\omega$ , koje kruži oko nepomične osi jednaka je prvoj derivaciji kuta rotacije po vremenu (2.4). Kutna brzina se mjeri u radijanima po sekundi.

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} \quad (2.4)$$

*Kutno ubrzanje tijela*  $\varepsilon$ , koje kruži oko nepomične osi jednako je prvoj derivaciji kutne brzine ili drugoj derivaciji kuta rotacije po vremenu (2.5). Kutno ubrzanje se mjeri u radijanima po sekundi na kvadrat.

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \ddot{\varphi} \quad (2.5)$$

Umnoškom kutne brzine štapa AB i udaljenosti specifične točke od pola rotacije A moguće je izračunati brzinu te točke (2.6).

$$v_B = r \cdot \omega_{AB} = r \cdot \dot{\varphi} \quad (2.6)$$

S obzirom da tijelo rotira kružno, ubrzanje odabrane točke se izražava pomoću prirodnih komponenti ubrzanja, tangencijalnog (2.7) i normalnog (2.8). Izraz za tangencijalnu komponentu glasi:

$$a_T = \frac{dv}{dt} = r \cdot \frac{d\omega}{dt} = r \cdot \varepsilon = r \cdot \ddot{\varphi} \quad (2.7)$$

Izraz za normalnu komponentu glasi:

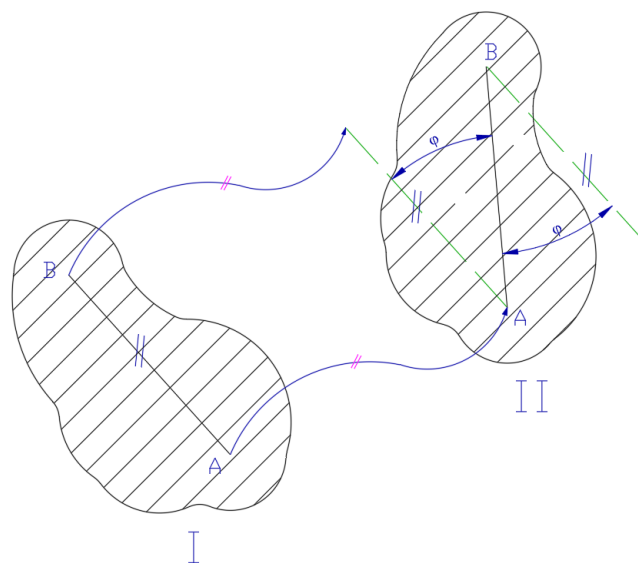
$$a_N = \frac{v^2}{r} = \frac{(r \cdot \omega)^2}{r} = r \cdot \omega^2 \quad (2.8)$$

Ukupno ubrzanje je korijen zbroja kvadrata tangencijalne i normalne komponente ubrzanja (1.9).

$$a = \sqrt{a_T^2 + a_N^2} = \sqrt{r^2 \cdot \varepsilon^2 + r^2 \cdot \omega^4} \quad (2.9)$$

### 2.3. Ravninsko gibanje krutog tijela

Ravninsko gibanje je kombinacija dvaju gibanja, translatornog i rotacijskog [2]. Gibanje tijela u ravnini određeno je s tri neovisna parametra, dvije translacije i jedne rotacije oko osi okomite na presjek tijela. Ukoliko bi tijelo translatorno premjestili od položaja I do položaja II, te rotirali za kut  $\varphi$  oko točke A, dobiveni položaj je rezultat ravninskog gibanja tijela (slika 2.3).



Slika 2.3 – Rastavljanje ravninskog gibanja

Translatorno gibanje tijela moguće je opisati parametarskim jednadžbama gibanja proizvoljne točke A, a rotacijsko gibanje proizvoljnim kutom  $\varphi$ .

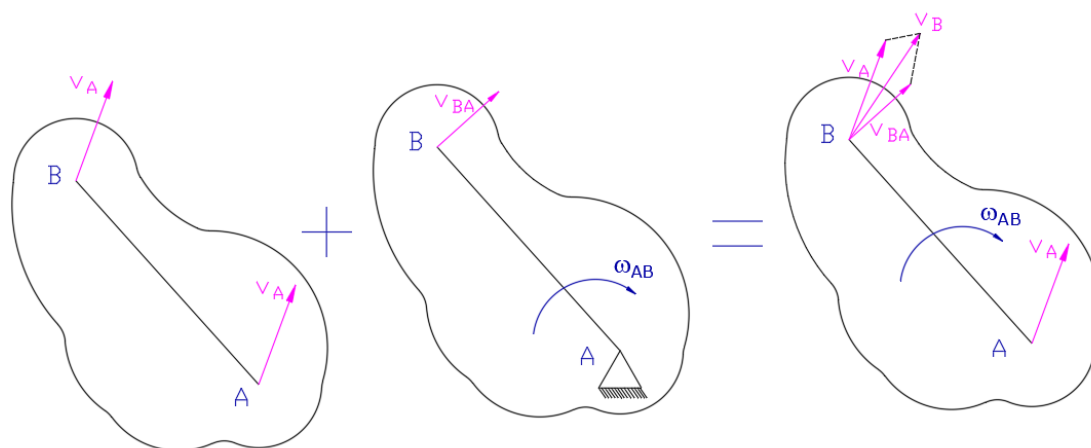
Pomoću jednadžbi (2.10-2.12) u ovisnosti o vremenu položaj tijela je u potpunosti određen.

$$x_A = x_A(t) \quad (2.10)$$

$$y_A = y_A(t) \quad (2.11)$$

$$\varphi = \varphi(t) \quad (2.12)$$

Brzine pojedinih točki prilikom ravninskog gibanja su izražene pomoću zbroja vektorskih komponenti brzina tijekom translacije te tijekom rotacije. Na slici 2.4 s lijeve strane je translacija tijela, dok je s desne strane rotacija točke B oko pola A. Vektorski zbroj i izračun za vektorske brzine i njihove komponente je u izrazima (2.13-2.14).



Slika 2.4 – Zbroj vektorskih komponenti brzine točke B

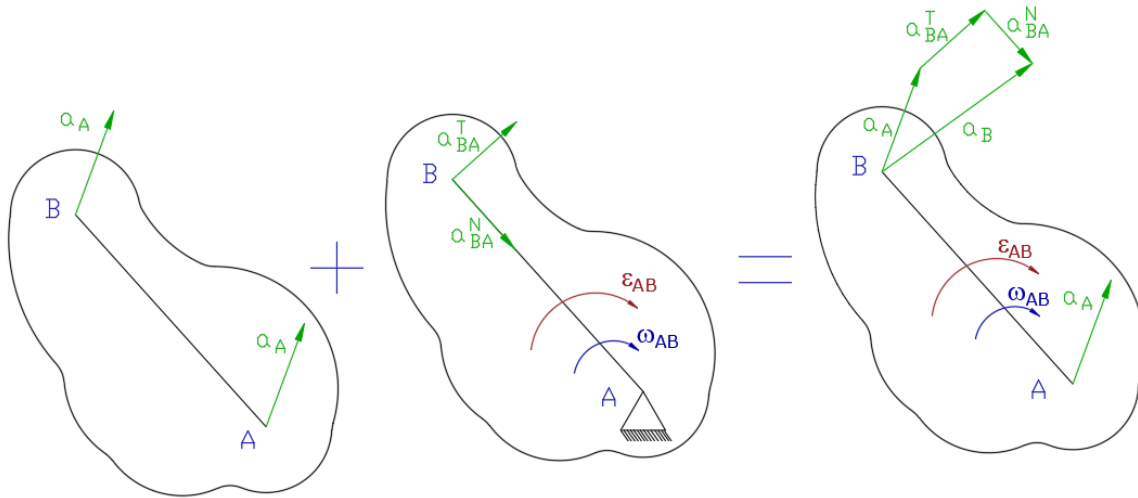
Izrazi za vektorske komponente brzina su:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA} \quad (2.13)$$

$$v_{BA} = \overline{AB} \cdot \omega_{AB} \quad (2.14)$$

Ubrzanja pojedinih točki prilikom ravninskog gibanja je moguće izraziti pomoću zbroja vektorskih komponenti ubrzanja translacije i rotacije. Na slici 2.5 s lijeve strane je skicirana

translacija tijela, dok je s desne strane rotacija točke B oko pola A. Vektorski zbroj i izračun za vektorska ubrzanja i njihove komponente je u izrazima (2.15-2.17).



Slika 2.5 – Zbroj vektorskih komponenti ubrzanja točke B

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^N + \vec{a}_{BA}^T \quad (2.15)$$

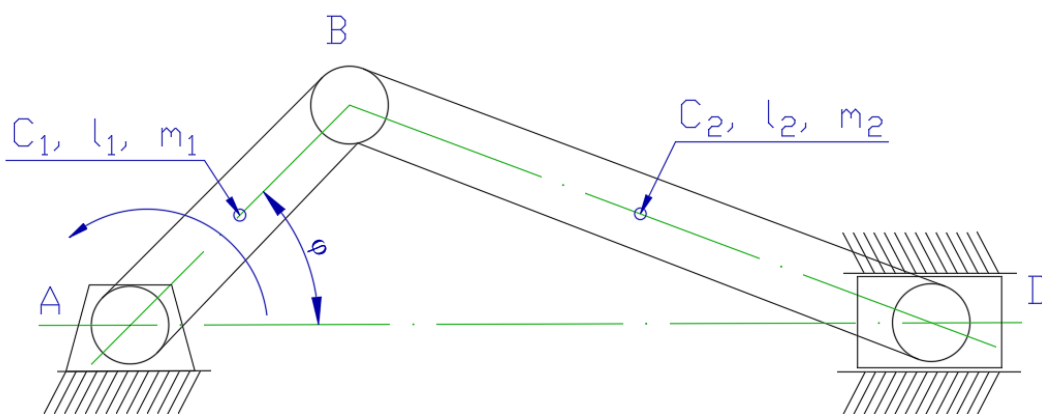
$$a_{BA}^T = \overline{AB} \cdot \varepsilon_{AB} \quad (2.16)$$

$$a_{BA}^N = \overline{AB} \cdot \omega_{AB}^2 \quad (2.17)$$

### 3. Opis zadanog mehanizma

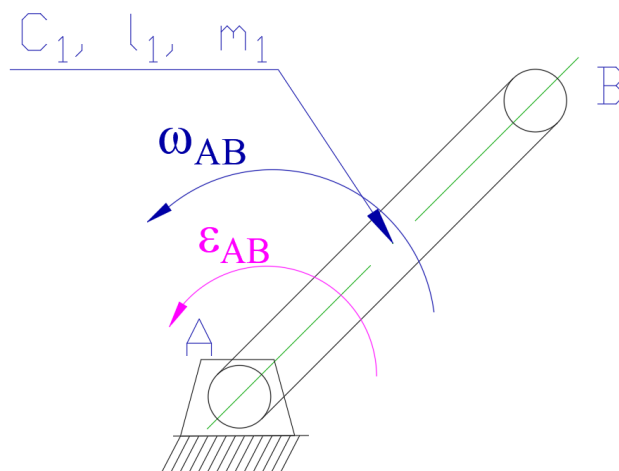
Mehanizam je sastavljen od štapa AB, štapa BD i klizača D. Štap AB je opisan rotacijskim gibanjem oko pola A, štap BD ravninskim gibanjem. Klizač D je kontroliran štapom BD i ograničen na gibanje po pravcu AD (slika 3.1). Mehanizam je moguće sagledati kao skup štapova i klizača. Ulazni podatci za mehanizam glase:

$$n = 1500 \frac{\text{okr}}{\text{min}} = \text{const.}; M_{AB} = 6850 \text{ Nm}; l_1 = 0,4 \text{ m}; l_2 = 0,8 \text{ m}; m_1 = 2 \text{ kg}; m_2 = 4 \text{ kg}; m_3 = 3 \text{ kg}.$$



Slika 3.1 – Skica zadanog mehanizma

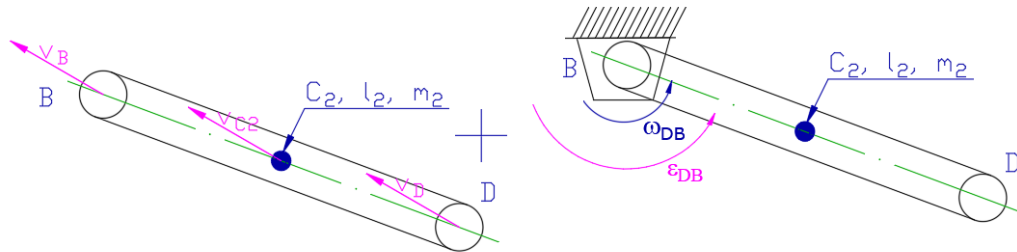
Iz zadanog broja okretaja  $n$ , zaključeno je da kutna brzina štapa AB je konstanta. Slijedi da je kutno ubrzanje štapa AB jednako nuli (slika 3.2).



Slika 3.2 – Skica štapa AB

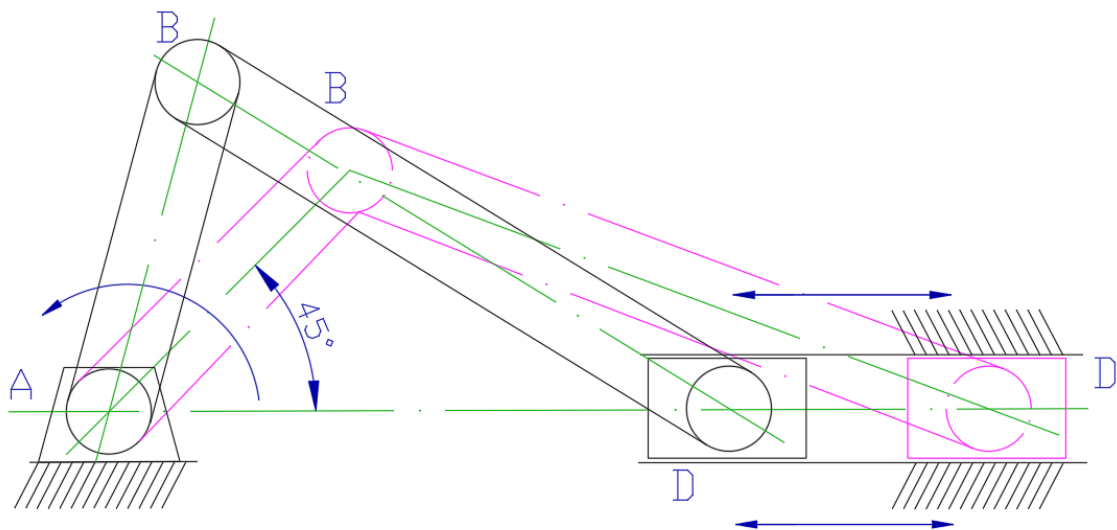


Ravninsko gibanje štapa BD je izrađeno od jedne translacije i jedne rotacije oko točke B (slika 3.3). Kutna brzina štapa DB je promjenjiva te je moguće izračunati kutno ubrzanje štapa DB za bilo koji kut  $\varphi$  mehanizma.



Slika 3.3 – Prikaz ravninskog gibanja štapa BD

Klizač D je ograničen prostorom s gornje i donje strane čime mu je omogućena kretanja samo po osi  $x$ . Stoga komponente brzine i ubrzanja točke D su spomenute za os  $x$ . Pokretanje mehanizma započinje rotacijom štapa AB koji je pokrenut od strane vanjskog pogona s 1500 okretaja po minuti. Štap AB je spojen s štapom BD te pokreće klizač D. Samo kretanje mehanizma je predloženo na slici 3.4.



Slika 3.4 – Skica kretanja mehanizma

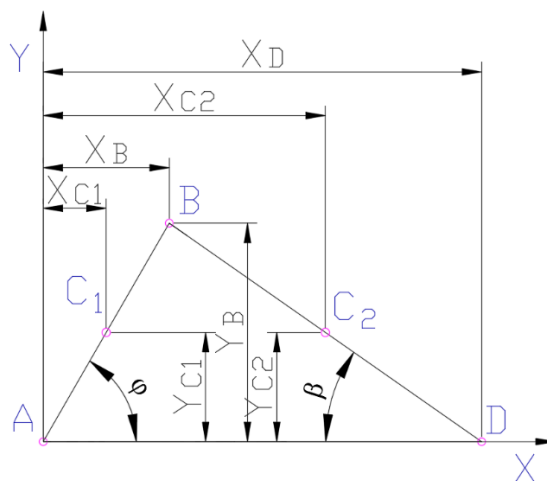
## 4. Kinematička analiza

Brzine i ubrzanja karakterističnih točki su obuhvaćene kroz kinematičku analizu mehanizma [3,4]. Sami proračun je odrađen na dva načina, prvi način je proračun preko koordinatnog sustava koristeći parametarske jednadžbe, dok drugi način je određen pomoću plana brzina i ubrzanja.

Proračun je započet od zadanog početnog kuta, cilj je izračunati brzine i ubrzanja za taj specifični kut. Promjena kuta će biti za svakih  $15^\circ$ , za primjer proračuna će se koristiti kut od  $60^\circ$ .

### 4.1. Proračun brzina i ubrzanja pomoću parametarskih jednadžbi gibanja

Koristeći se koordinatnim sustavom, moguće je odrediti koordinate pojedinih točaka koje predstavljaju parametarske jednadžbe istih.



Slika 4.1 – Dužine štapova prikazane u koordinatnom sustavu

Pomoću dužina štapova  $l_1$ ,  $l_2$  i kutova  $\varphi$ ,  $\beta$  (slika 4.1) prikazane su jednadžbe koordinata pojedinih točaka (4.1-4.7).

$$x_B = l_1 \cdot \cos \varphi \quad (4.1)$$

$$y_B = l_1 \cdot \sin \varphi \quad (4.2)$$

$$x_{C1} = \frac{l_1}{2} \cdot \cos \varphi \quad (4.3)$$

$$y_{C1} = \frac{l_1}{2} \cdot \sin \varphi \quad (4.4)$$

$$x_{C2} = l_1 \cdot \cos \varphi + \frac{l_2}{2} \cdot \cos \beta \quad (4.5)$$

$$y_{C2} = \frac{l_2}{2} \cdot \sin \beta \quad (4.6)$$

$$x_D = l_1 \cdot \cos \varphi + l_2 \cdot \cos \beta \quad (4.7)$$

Pomoću broja okretaja u minuti  $n$  prikazana je jednadžba kutne brzine pogonskog člana  $\omega_{AB}$  prema izrazu 4.8.

$$\omega_{AB} = \frac{\pi \cdot n}{30} = konst. \quad (4.8)$$

Ukoliko se deriviraju jednadžbe dužina (4.1-4.7), dobivene su jednadžbe brzina pojedinačnih točki za specifične osi:

$$v_{Bx} = \dot{x}_B = -l_1 \cdot \sin \varphi \cdot \frac{d\varphi}{dt} = -l_1 \cdot \sin \varphi \cdot \omega_{AB} \quad (4.9)$$

$$v_{By} = \dot{y}_B = l_1 \cdot \cos \varphi \cdot \frac{d\varphi}{dt} = l_1 \cdot \cos \varphi \cdot \omega_{AB} \quad (4.10)$$

$$v_{C1x} = \dot{x}_{C1} = -\frac{l_1}{2} \cdot \sin \varphi \cdot \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{l_1}{2} \cdot \sin \varphi \cdot \omega_{AB} \quad (4.11)$$

$$v_{C1y} = \dot{y}_{C1} = \frac{l_1}{2} \cdot \cos \varphi \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \frac{l_1}{2} \cdot \cos \varphi \cdot \omega_{AB} \quad (4.12)$$

$$v_{C2x} = \dot{x}_{C2} = -l_1 \cdot \sin \varphi \cdot \frac{d\varphi}{dt} - \frac{l_2}{2} \cdot \sin \beta \cdot \dot{\beta} = -l_1 \cdot \sin \varphi \cdot \omega_{AB} - \frac{l_2}{2} \cdot \sin \beta \cdot \dot{\beta} \quad (4.13)$$

$$v_{C2y} = \dot{y}_{C2} = \frac{l_2}{2} \cdot \cos \beta \cdot \dot{\beta} \quad (4.14)$$

$$v_D = \dot{x}_D = -l_1 \cdot \sin \varphi \cdot \frac{d\varphi}{dt} - l_2 \cdot \sin \beta \cdot \dot{\beta} = -l_1 \cdot \sin \varphi \cdot \omega_{AB} - l_2 \cdot \sin \beta \cdot \dot{\beta} \quad (4.15)$$

Ukoliko se deriviraju jednadžbe brzina (4.9-4.15), dobiju se jednadžbe ubrzanja pojedinih točaka za specifične osi:

$$a_{Bx} = \dot{v}_{Bx} = -l_1 \cdot \cos \varphi \cdot \omega_{AB}^2 \quad (4.16)$$

$$a_{By} = \dot{v}_{By} = -l_1 \cdot \sin \varphi \cdot \omega_{AB}^2 \quad (4.17)$$

$$a_{C1x} = \dot{v}_{C1x} = -\frac{l_1}{2} \cdot \cos \varphi \cdot \omega_{AB}^2 \quad (4.18)$$

$$a_{C1y} = \dot{v}_{C1y} = -\frac{l_1}{2} \cdot \sin \varphi \cdot \omega_{AB}^2 \quad (4.19)$$

$$a_{C2x} = \dot{v}_{C2x} = -l_1 \cdot \cos \varphi \cdot \omega_{AB}^2 - \frac{l_2}{2} \cdot \cos \beta \cdot \dot{\beta}^2 - \frac{l_2}{2} \cdot \sin \beta \cdot \ddot{\beta} \quad (4.20)$$

$$a_{C2y} = \dot{v}_{C2y} = -\frac{l_2}{2} \cdot \sin \beta \cdot \dot{\beta}^2 + \frac{l_2}{2} \cdot \cos \beta \cdot \ddot{\beta} \quad (4.21)$$

$$a_D = \dot{v}_D = -l_2 \cdot \cos \varphi \cdot \omega_{AB}^2 - l_2 \cdot \cos \beta \cdot \dot{\beta}^2 - l_2 \cdot \sin \beta \cdot \ddot{\beta} \quad (4.22)$$

U gornjim jednadžbama je kutna brzina štapa BD jednaka prvoj derivaciji kuta  $\beta$ , dok je kutno ubrzanje štapa BD jednako prvoj derivaciji kutne brzine te drugoj derivaciji kuta  $\beta$ , ukoliko se izjednače dužine štapova po osi y dobije se izraz preko kojega se može izračunati kut  $\beta$ :

$$l_1 \cdot \sin \varphi = l_2 \cdot \sin \beta \rightarrow \beta = \arcsin \left[ \frac{l_1}{l_2} \cdot \sin \varphi \right] \quad (4.23)$$

$$l_1 \cdot \sin \varphi = l_2 \cdot \sin \beta \quad /' \rightarrow l_1 \cdot \cos \varphi \cdot \dot{\varphi} = l_2 \cdot \cos \beta \cdot \dot{\beta} \quad (4.24)$$

$$\dot{\beta} = \frac{d\beta}{dt} = \omega_{BD} = \frac{l_1 \cdot \omega_{AB} \cdot \cos \varphi}{l_2 \cdot \cos \beta} \quad (4.25)$$

$$l_1 \cdot \cos \varphi \cdot \dot{\varphi} = l_2 \cdot \cos \beta \cdot \dot{\beta} \quad /' \rightarrow l_2 \cdot \sin \beta \cdot \dot{\beta}^2 - l_1 \cdot \omega_{AB}^2 \cdot \sin \varphi = l_2 \cdot \cos \beta \cdot \ddot{\beta} \quad (4.26)$$

$$\ddot{\beta} = \frac{d\omega_{BD}}{dt} = \varepsilon_{BD} = \frac{l_2 \cdot \sin \beta \cdot \dot{\beta}^2 - l_1 \cdot \omega_{AB}^2 \cdot \sin \varphi}{l_2 \cdot \cos \beta} \quad (4.27)$$

Korištenjem jednadžbi (4.1-4.27) izračunati su iznosi brzina i ubrzanja u ovisnosti o kutu  $\varphi$ .

Tablica 4.1 – Brzine pojedinih točaka u ovisnosti o kutu  $\varphi$ 

$\varphi$	$\beta$	$v_{C1}$	$v_B$	$v_{C2}$	$v_D$
°	°	m/s	m/s	m/s	m/s
0	0,0	31,4	62,8	31,4	0,0
15	7,4	31,4	62,8	36,5	-24,2
30	14,5	31,4	62,8	47,1	-45,5
45	20,7	31,4	62,8	57,3	-61,2
60	25,7	31,4	62,8	63,9	-69,5
75	28,9	31,4	62,8	65,7	-69,7
90	30,0	31,4	62,8	62,8	-62,8
105	28,9	31,4	62,8	56,8	-51,7
120	25,7	31,4	62,8	49,4	-39,3
135	20,7	31,4	62,8	42,3	-27,6
150	14,5	31,4	62,8	36,5	-17,4
165	7,4	31,4	62,8	32,7	-8,3
180	0,0	31,4	62,8	31,4	0,0
195	7,4	31,4	62,8	36,5	24,2
210	14,5	31,4	62,8	47,1	45,5
225	20,7	31,4	62,8	57,3	61,2
240	25,7	31,4	62,8	63,9	69,5
255	28,9	31,4	62,8	65,7	69,7
270	30,0	31,4	62,8	62,8	62,8
285	28,9	31,4	62,8	56,8	51,7
300	25,7	31,4	62,8	49,4	39,3
315	20,7	31,4	62,8	42,3	27,6
330	14,5	31,4	62,8	36,5	17,4
345	7,4	31,4	62,8	32,7	8,3
360	0,0	31,4	62,8	31,4	0,0

Tablica 4.2 – Ubrzanja pojedinih točaka u ovisnosti o kutu  $\varphi$ 

$\varphi$	$\beta$	$\omega_{AB}$	$\omega_{DB}$	$\varepsilon_{DB}$	$a_{C1}$	$a_B$	$a_{C2}$	$a_D$
°	°	rad/s	rad/s	rad/s <sup>2</sup>	m/s <sup>2</sup>	m/s <sup>2</sup>	m/s <sup>2</sup>	m/s <sup>2</sup>
0	0,0	157,1	78,5	0	4935	9870	12337	-14804
15	7,4	157,1	76,5	-2456	4935	9870	11797	-13922
30	14,5	157,1	70,2	-5097	4935	9870	10250	-11350
45	20,7	157,1	59,4	-7994	4935	9870	7972	-7356
60	25,7	157,1	43,6	-10941	4935	9870	5669	-2513
75	28,9	157,1	23,2	-13312	4935	9870	4770	2211
90	30,0	157,1	0,0	-14246	4935	9870	5698	5698
105	28,9	157,1	-23,2	-13312	4935	9870	6863	7320
120	25,7	157,1	-43,6	-10941	4935	9870	7485	7356
135	20,7	157,1	-59,4	-7994	4935	9870	7635	6602
150	14,5	157,1	-70,2	-5097	4935	9870	7560	5744
165	7,4	157,1	-76,5	-2456	4935	9870	7449	5144
180	0,0	157,1	-78,5	0	4935	9870	7402	4935
195	7,4	157,1	-76,5	3984	4935	9870	7121	4478
210	14,5	157,1	-70,2	7645	4935	9870	6369	3196
225	20,7	157,1	-59,4	10658	4935	9870	5424	1327
240	25,7	157,1	-43,6	12765	4935	9870	4735	-856
255	28,9	157,1	-23,2	13906	4935	9870	4777	-3196
270	30,0	157,1	0,0	14246	4935	9870	5698	-5698
285	28,9	157,1	23,2	13906	4935	9870	7225	-8305
300	25,7	157,1	43,6	12765	4935	9870	8920	-10725
315	20,7	157,1	59,4	10658	4935	9870	10407	-12631
330	14,5	157,1	70,2	7645	4935	9870	11491	-13899
345	7,4	157,1	76,5	3984	4935	9870	12129	-14589
360	0,0	157,1	78,5	0	4935	9870	12337	-14804

Napraviti će se proračun za slučaj kada je kut  $60^\circ$ . Vrijednosti brzina i ubrzanja za ostale iznose kutova se nalaze u tablicama 4.1 i 4.2.

Korištenjem izraza 4.23-4.27 izračunate su vrijednosti kuta  $\beta$ , kao prva i druga derivaciju istoimenog kuta:

$$\beta = \arcsin \left[ \frac{0,4}{0,8} \cdot \sin 60^\circ \right] = 25,7^\circ$$

$$\dot{\beta} = \frac{0,4 \cdot 157,1 \cdot \cos 60^\circ}{0,8 \cdot \cos 25,7^\circ} = 43,6 \text{ s}^{-1}$$

$$\ddot{\beta} = \frac{0,8 \cdot \sin 25,7^\circ \cdot (43,6)^2 - 0,4 \cdot (157,1)^2 \cdot \sin 60^\circ}{0,8 \cdot \cos 25,7^\circ} = -10945 \text{ s}^{-2}$$

Pomoću jednadžbe 4.8 izračunata je kutna brzina  $\omega_{AB}$ .

$$\omega_{AB} = \frac{\pi \cdot n}{30} = \frac{\pi \cdot 1500}{30} = 157,1 \frac{\text{rad}}{\text{s}} = \dot{\varphi}$$

Pomoću jednadžbi 4.9-4.15 izračunate su brzine pojedinačnih točki po x i y osi.

$$v_{Bx} = -l_1 \cdot \sin \varphi \cdot \omega_{AB} = -0,4 \cdot \sin 60^\circ \cdot 157,1 = -54,4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_{By} = l_1 \cdot \cos \varphi \cdot \omega_{AB} = 0,4 \cdot \cos 60^\circ \cdot 157,1 = 31,4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_B = \sqrt{v_{Bx}^2 + v_{By}^2} = \sqrt{(-54,4)^2 + 31,4^2} = 62,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_{C1x} = -\frac{l_1}{2} \cdot \sin \varphi \cdot \omega_{AB} = -\frac{0,4}{2} \cdot \sin 60^\circ \cdot 157,1 = -27,2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_{C1y} = \frac{l_1}{2} \cdot \cos \varphi \cdot \omega_{AB} = \frac{0,4}{2} \cdot \cos 60^\circ \cdot 157,1 = 15,7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_{C1} = \sqrt{v_{C1x}^2 + v_{C1y}^2} = \sqrt{(-27,2)^2 + 15,7^2} = 31,4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_{C2x} = -l_1 \cdot \sin \varphi \cdot \omega_{AB} - \frac{l_2}{2} \cdot \sin \beta \cdot \dot{\beta}$$

$$v_{C2x} = -0,4 \cdot \sin 60^\circ \cdot 157,1 - \frac{0,8}{2} \cdot \sin 25,7^\circ \cdot 43,6 = 62,0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_{C2y} = \frac{l_2}{2} \cdot \cos \beta \cdot \dot{\beta} = \frac{0,8}{2} \cdot \cos 25,7^\circ \cdot 43,6 = 15,7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_{C2} = \sqrt{v_{C2x}^2 + v_{C2y}^2} = \sqrt{62^2 + 15,7^2} = 64 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_D = -l_1 \cdot \sin \varphi \cdot \omega_{AB} - l_2 \cdot \sin \beta \cdot \dot{\beta}$$

$$v_D = -0,4 \cdot \sin 60^\circ \cdot 157,1 - 0,8 \cdot \sin 25,7^\circ \cdot 43,6 = 69,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Pomoću izraza 4.16-4.22 izračunata su ubrzanja pojedinačnih točki po x i y osi.

$$a_{Bx} = -l_1 \cdot \cos \varphi \cdot \omega_{AB}^2 = -0,4 \cdot \cos 60^\circ \cdot 157,1^2 = -4936 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$a_{By} = -l_1 \cdot \sin \varphi \cdot \omega_{AB}^2 = -0,4 \cdot \sin 60^\circ \cdot 157,1^2 = -8550 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$a_B = \sqrt{a_{Bx}^2 + a_{By}^2} = \sqrt{(-4936)^2 + (-8550)^2} = 9873 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$a_{C1x} = -\frac{l_1}{2} \cdot \cos \varphi \cdot \omega_{AB}^2 = -\frac{0,4}{2} \cdot \cos 60^\circ \cdot 157,1^2 = -2468 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$a_{C1y} = -\frac{l_1}{2} \cdot \sin \varphi \cdot \omega_{AB}^2 = -\frac{0,4}{2} \cdot \sin 60^\circ \cdot 157,1^2 = -4275 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$a_{C1} = \sqrt{a_{C1x}^2 + a_{C1y}^2} = \sqrt{(-2468)^2 + (-4275)^2} = 4936 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$a_{C2x} = -l_1 \cdot \cos \varphi \cdot \omega_{AB}^2 - \frac{l_2}{2} \cdot \cos \beta \cdot \dot{\beta}^2 - \frac{l_2}{2} \cdot \sin \beta \cdot \ddot{\beta} = -3722 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$a_{C2y} = -\frac{l_2}{2} \cdot \sin \beta \cdot \dot{\beta}^2 + \frac{l_2}{2} \cdot \cos \beta \cdot \ddot{\beta} = -4278 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$a_{C2} = \sqrt{a_{C2x}^2 + a_{C2y}^2} = \sqrt{(-3722)^2 + (-4278)^2} = 5670 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$a_D = -l_1 \cdot \cos \varphi \cdot \omega_{AB}^2 - l_2 \cdot \cos \beta \cdot \dot{\beta}^2 - l_2 \cdot \sin \beta \cdot \ddot{\beta} = -2509 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

## 4.2. Proračun brzina i ubrzanja korištenjem plana brzina i ubrzanja

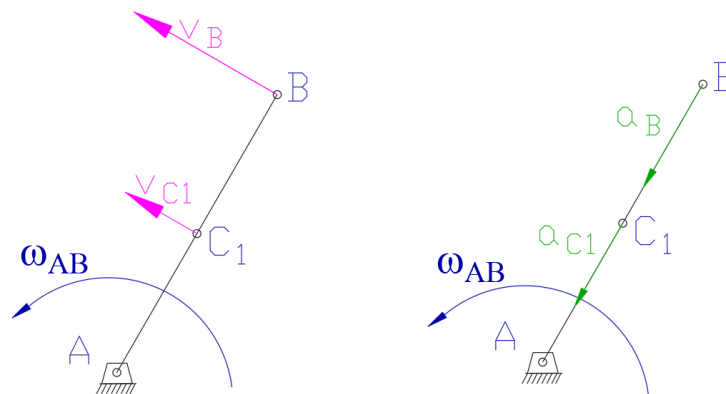
Korištenjem plana brzina i ubrzanja provjeriti će se već dobiveni rezultati. Provjera se vrši za isti slučaj kada početni kut iznosi  $60^\circ$ . Pomoću *okretaja u minuti n*, izračunata je kutna brzina štapa AB.

$$\omega_{AB} = \frac{\pi \cdot n}{30} = \frac{\pi \cdot 1500}{30} = 157,1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$



### Rotacijsko gibanje štapa AB

Na slici 4.2 prikazano je rotacijsko gibanje štapa AB, pomoću skice su određeni iznosi brzina točke B i C<sub>1</sub>. S obzirom na to da se štap rotira oko pola A, brzine su jednake umnošku kutne brzine štapa i iznosa udaljenosti pojedine točke od pola.



Slika 4.2 – Prikaz brzina i ubrzanja na štapu AB

$$v_B = l_1 \cdot \omega_{AB} = 0,4 \cdot 157,1 = 62,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_{C1} = \frac{l_1}{2} \cdot \omega_{AB} = \frac{0,4}{2} \cdot 157,1 = 31,4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Na slici 4.2 su također prikazana ubrzanja točki B i C<sub>1</sub> koje su smještene na štapu AB, s obzirom da štap AB ima rotacijsko gibanje, ubrzanja će sadržavati samo normalnu komponentu.

$$a_B = a_B^N = l_1 \cdot \omega_{AB}^2 = 0,4 \cdot 157,1^2 = 9872 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$a_{C1} = a_{C1}^N = \frac{l_1}{2} \cdot \omega_{AB}^2 = 0,2 \cdot 157,1^2 = 4936 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Malo odstupanje izračunatih vrijednosti u usporedbi s vrijednošću izračunatih u tablicama je razlog zaokruživanja na jednu decimalu pri računanju.

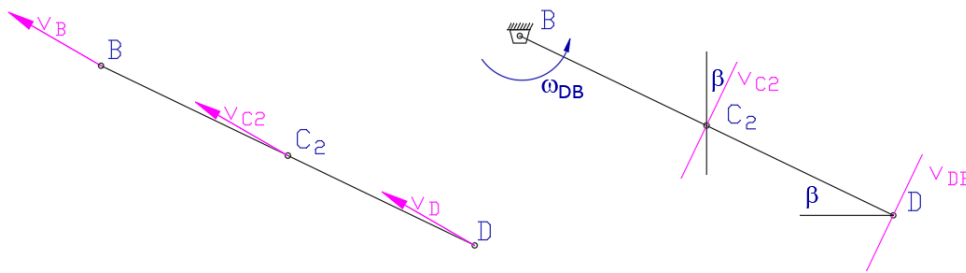
### Ravninsko gibanje štapa BD

Ravninsko gibanje je rastavljeno na translaciju te rotaciju štapa oko točke B (slika 4.3). Konačni iznosi brzina su zbroj vektora translacije i rotacije.

Preko dužine BE izračunati je kut  $\beta$  koji služi kao komponenta za jednadžbe brzina i ubrzanja pojedinih točaka.

$$\overline{BE} = \sin \varphi \cdot l_1 = \sin 60^\circ \cdot 0,4 = 0,35 \text{ m}$$

$$\beta = \arcsin \frac{\overline{BE}}{l_2} = \arcsin \frac{0,35}{0,8} = 25,7^\circ$$

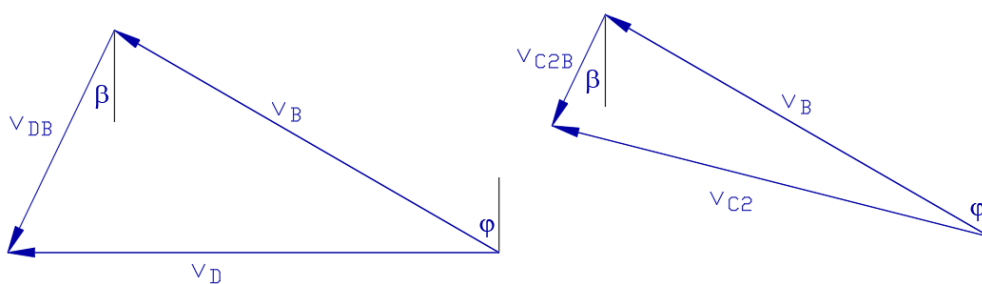


Slika 4.3 – Prikaz brzina tijekom translacije i rotacije štapa BD

Za proračun je potreban vektorski zbroj brzina prikazan na slici 4.4.

$$\vec{v}_D = \vec{v}_D^{\text{TR}} + \vec{v}_D^{\text{ROT}}$$

$$\vec{v}_{C2} = \vec{v}_{C2}^{\text{TR}} + \vec{v}_{C2}^{\text{ROT}}$$



Slika 4.4 – Vektorski prikaz brzina  $v_D$  (lijevo) i  $v_{C2}$  (desno)

Korištenjem vektorskog zbroja, izrazi za brzine glase:

$$v_{Dx} = v_D = v_B \cdot \sin \varphi + v_{DB} \cdot \sin \beta$$

$$v_{Dx} = v_D = 62,8 \cdot \sin 60^\circ + 35 \cdot \sin 25,7^\circ = 69,6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_{Dy} = 0 = v_B \cdot \cos \varphi - v_{DB} \cdot \cos \beta$$

$$v_{DB} = v_B \cdot \frac{\cos \varphi}{\cos \beta} = 62,8 \cdot \frac{\cos 60^\circ}{\cos 25,7^\circ} = 34,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Izraz za kutnu brzinu štapa BD je:

$$\omega_{DB} = \frac{v_{DB}}{l_2} = \frac{34,8}{0,8} = 43,5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Izrazi za brzinu točke C<sub>2</sub> glasi:

$$v_{C2x} = v_B \cdot \sin \varphi + v_{C2B} \cdot \sin \beta = v_B \cdot \sin \varphi + \left(\frac{l_2}{2} \cdot \omega_{DB}\right) \cdot \sin \beta$$

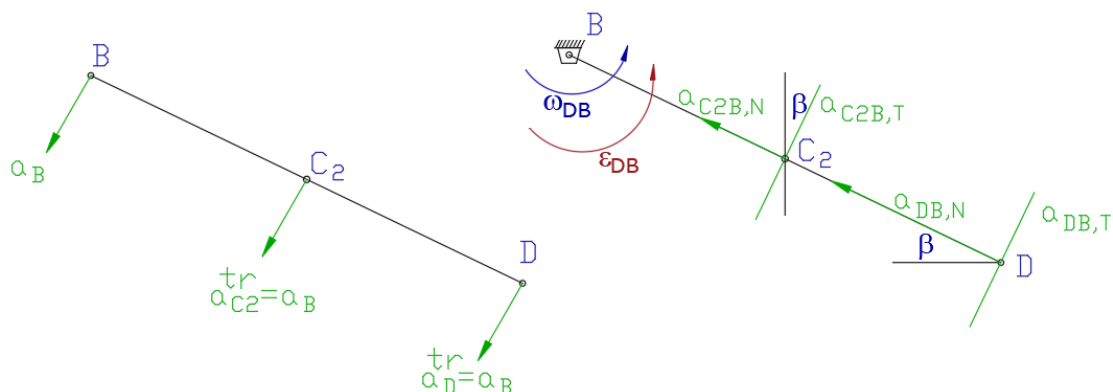
$$v_{C2x} = 62,8 \cdot \sin 60^\circ + \left(\frac{0,8}{2} \cdot 43,5\right) \cdot \sin 25,7 = 61,9 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_{C2y} = v_B \cdot \cos \varphi - v_{C2B} \cdot \cos \beta = v_B \cdot \cos \varphi - \left(\frac{l_2}{2} \cdot \omega_{DB}\right) \cdot \cos \beta$$

$$v_{C2y} = 62,8 \cdot \cos 60^\circ - \left(\frac{0,8}{2} \cdot 43,5\right) \cdot \cos 25,7^\circ = 15,7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

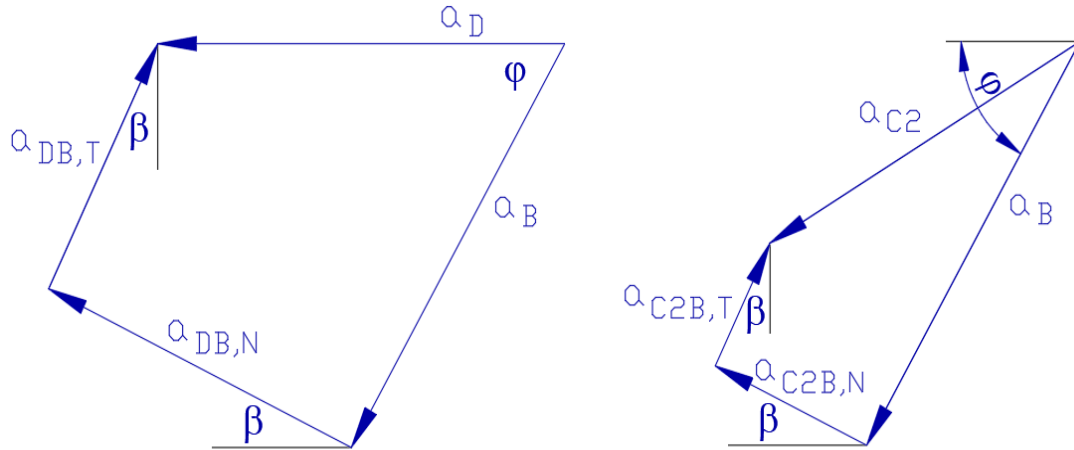
$$v_{C2} = \sqrt{v_{C2x}^2 + v_{C2y}^2} = 63,9 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Ubrzanja točke D i C<sub>2</sub> su prikazana pomoću translacije i rotacije štapa BD (slika 4.5).



Slika 4.5 – Prikaz ubrzanja tijekom translacije i rotacije štapa BD

Prilikom translacije, ubrzanja svih točaka ostaju jednaka. A tijekom rotacije dolazimo do tangencijalnih komponenti ubrzanja. Vektorski zbroj ubrzanja (slika 4.6) se koristi da bi dobili konačne rezultate ubrzanja.



Slika 4.6 – Vektorski zbroj ubrzanja točke D (lijevo) i C<sub>2</sub> (desno)

Za izračun pojedinih ubrzanja nam je potreban vektorski zbroj prikazan na slici 4.6.

$$\vec{a}_D = \vec{a}_D^{TR} + \vec{a}_D^{ROT} = \vec{a}_B + \vec{a}_{DB}^N + \vec{a}_{DB}^T$$

$$\vec{a}_{C2} = \vec{a}_{C2}^{TR} + \vec{a}_{C2}^{ROT} = \vec{a}_B + \vec{a}_{C2B}^N + \vec{a}_{C2B}^T$$

Pomoću kutnog ubrzanja štapa BD izračunata su normalna ubrzanja istoimenog štapa:

$$a_{C2B}^N = \frac{l_2}{2} \cdot \omega_{DB}^2 = \frac{0,8}{2} \cdot 43,5^2 = 757 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$a_{DB}^N = l_2 \cdot \omega_{DB}^2 = 0,8 \cdot 43,5^2 = 1514 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Pomoću vektorskog zbroja, jednadžba ubrzanja točke D glasi:

$$a_{Dy} = 0 = -a_B \cdot \sin \varphi + a_{DB}^N \cdot \sin \beta + a_{DB}^T \cdot \cos \beta$$

$$a_{DB}^T \cdot \cos \beta = a_B \cdot \sin \varphi - a_{DB}^N \cdot \sin \beta$$

$$a_{DB}^T = \frac{a_B \cdot \sin \varphi - a_{DB}^N \cdot \sin \beta}{\cos \beta} = \frac{9872 \cdot \sin 60^\circ - 1514 \cdot \sin 25,7^\circ}{\cos 25,7^\circ} = 8759 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$a_{D_x} = a_D = a_B \cdot \cos \varphi + a_{DB}^N \cdot \cos \beta - a_{DB}^T \cdot \sin \beta$$

$$a_D = 9872 \cdot \cos 60^\circ + 1514 \cdot \cos 25,7^\circ - 8759 \cdot \sin 25,7^\circ = 2502 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Izraz za kutno ubrzanje štapa BD:

$$\varepsilon_{DB} = \frac{a_{DB}^T}{l_2} = \frac{8759}{0,8} = 10949 \text{ s}^{-2}$$

Slijedi jednačba ubrzanja točke C<sub>2</sub>:

$$a_{C2B}^T = \frac{l_2}{2} \cdot \varepsilon_{DB} = \frac{0,8}{2} \cdot 10949 = 4380 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$a_{C2x} = a_B \cdot \cos \varphi + a_{C2B}^N \cdot \cos \beta - a_{C2B}^T \cdot \sin \beta$$

$$a_{C2x} = 9872 \cdot \cos 60^\circ + 757 \cdot \cos 25,7^\circ - 4380 \cdot \sin 25,7^\circ = 3719 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

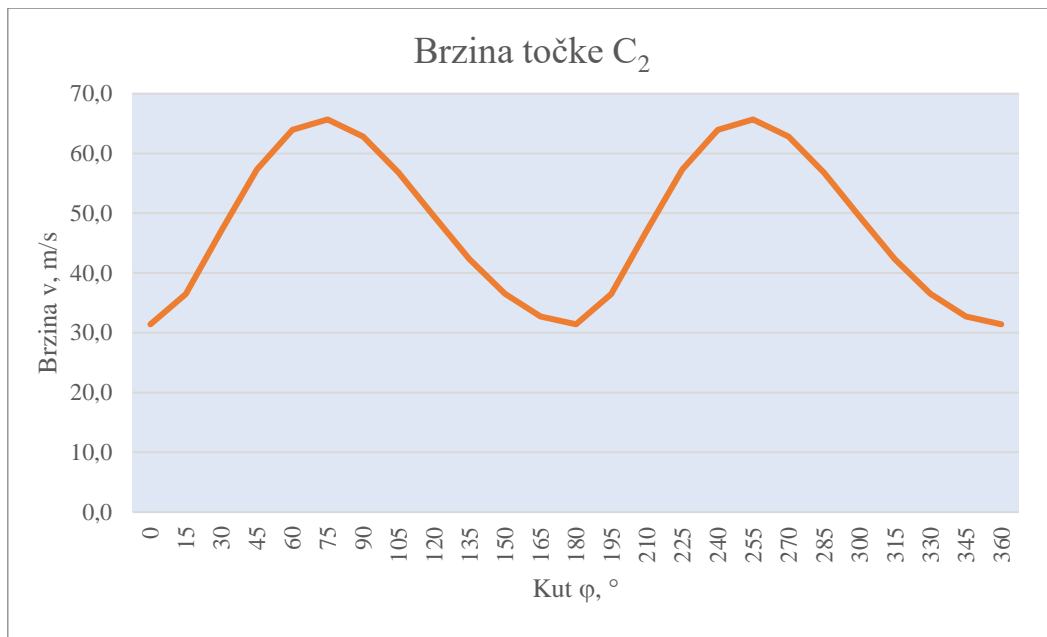
$$a_{C2y} = -a_B \cdot \sin \varphi + a_{C2B}^N \cdot \sin \beta + a_{C2B}^T \cdot \cos \beta$$

$$a_{C2y} = -9872 \cdot \sin 60^\circ + 757 \cdot \sin 25,7^\circ + 4380 \cdot \cos 25,7^\circ = -4274 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

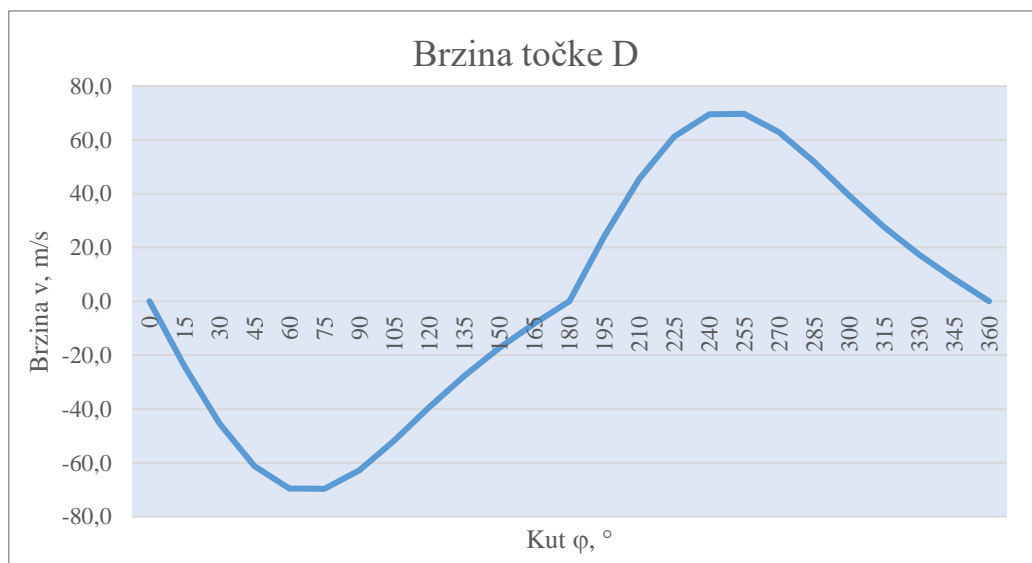
$$a_{C2} = \sqrt{a_{C2x}^2 + a_{C2y}^2} = 5666 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Pomoću svih jednačbi moguće je napraviti usporedbu brzina i ubrzanja u ovisnosti o kutu  $\varphi$  zadanog mehanizma.

Intenziteti brzina i ubrzanja pojedinih točaka su prikazani tijekom jednog okretaja mehanizma. U dijagramima su korišteni podatci iz parametarskih jednačbi gibanja. Na slikama 4.7 i 4.8 je prikazana brzina točaka D i C<sub>2</sub> s pomakom od 15°.

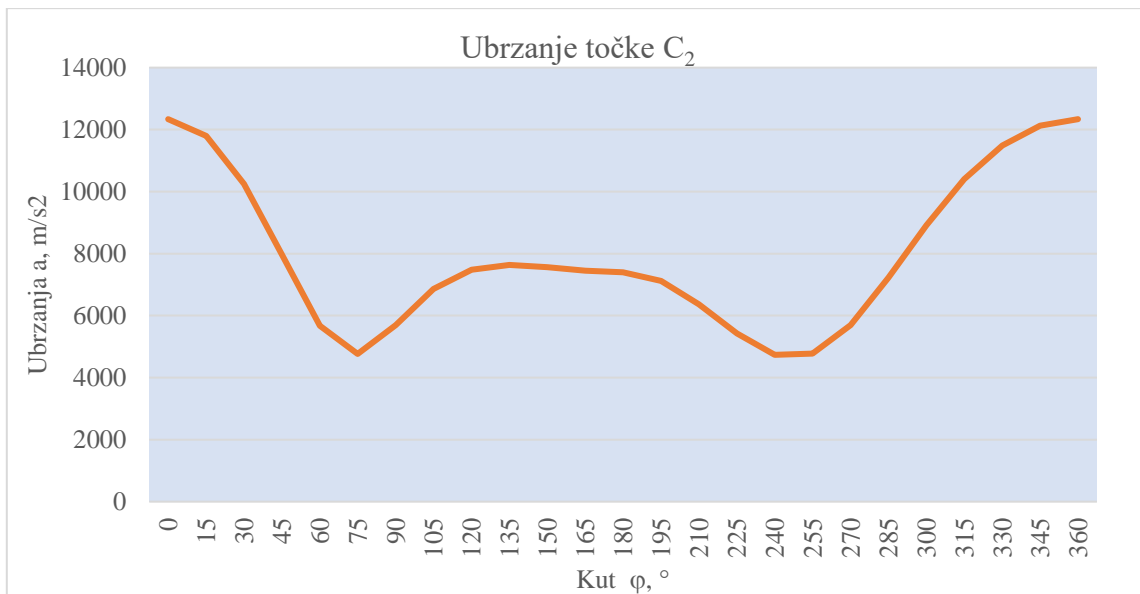


Slika 4.7 – Dijagram brzine točke C<sub>2</sub> u ovisnosti o kutu  $\varphi$

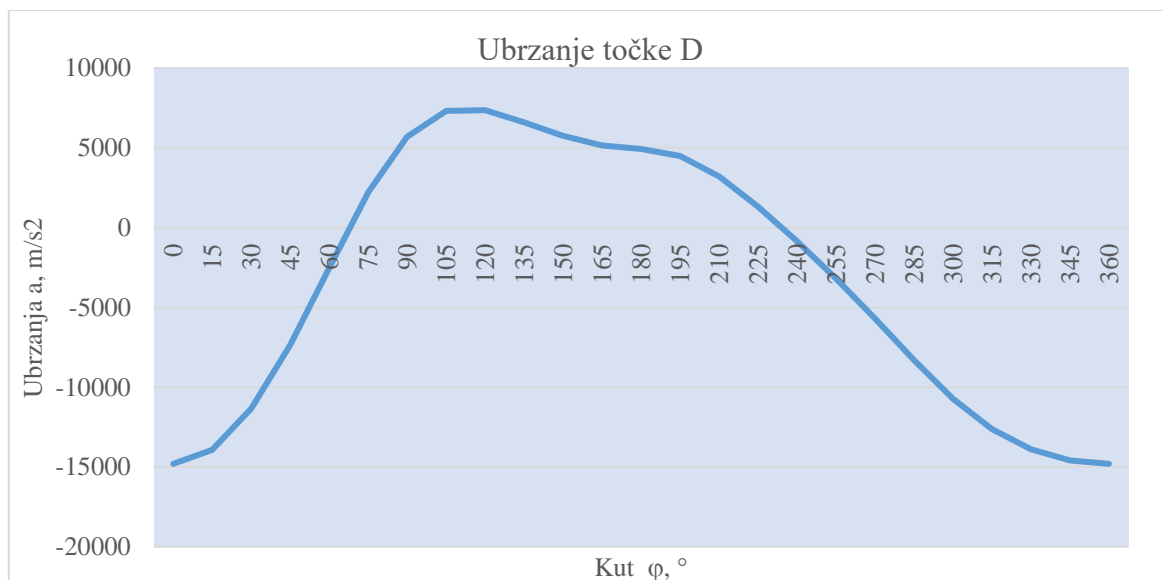


Slika 4.8 – Dijagram brzine točke D u ovisnosti o kutu  $\varphi$

Na slikama 4.9 i 4.10 prikazan je intenzitet ubrzanja dviju točki prilikom jednog okretaja mehanizma s obzirom na to da proračun koristi vrijednost prilikom pokretanja mehanizma. Pritom dolazi do pada i rasta veličina pri početku i kraju ciklusa.



Slika 4.9 – Dijagram ubrzanja točke  $C_2$  u ovisnosti o kutu  $\varphi$

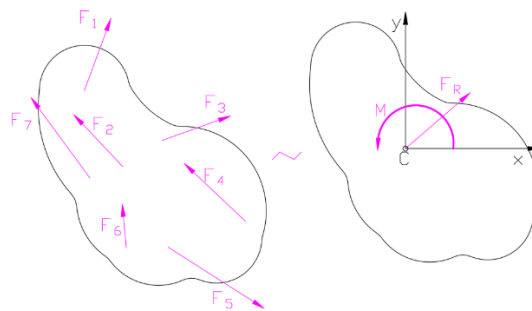


Slika 4.10 – Dijagram ubrzanja točke D u ovisnosti o kutu  $\varphi$

## 5. Dinamika ravninskog gibanja krutog tijela

### 5.1. Jednadžbe ravninskog gibanja krutog tijela

Ukoliko na tijelo utječe ravninski sustav sila, taj sustav sila je izražen kao jedna rezultantna sila iz proizvoljno odabrane točke te jedan moment koji je jednak sumi svih momenata zadanih sila za tu točku. Na slici 5.1 je prikazan ravninski sustav sila, dok na desnoj slici je taj sustav sveden na jednu rezultantnu silu [4].



Slika 5.1 – Ravninski sustav sila(lijevo) i sustav sveden na rezultantnu silu(desno)

Za izračunati rezultantnu silu je potrebna suma svih sila po osi x (5.1) i osi y (5.2). A da bi se u potpunosti odredio sustav potrebna je suma momenata sila za centar mase krutog tijela (5.3).

$$F_{Rx} = \sum F_{ix} \quad (5.1)$$

$$F_{Ry} = \sum F_{iy} \quad (5.2)$$

$$M_C^R = \sum M_C^{\vec{F}_i} \quad (5.3)$$

Diferencijalne jednadžbe ravninskog gibanja krutog tijela su u izrazima 5.4-5.6. Umnožak mase i komponente ubrzanja po x ili y osi su jednaki rezultantnoj sili F za tu os. Koordinate sustava  $x_C$ ,  $y_C$  i kuta  $\varphi$  u ovisnosti o vremenu su dobivene integriranjem izraza ispod.

$$m \cdot \ddot{x}_C = F_{Rx} \quad (5.4)$$

$$m \cdot \ddot{y}_C = F_{Ry} \quad (5.5)$$

$$I_{Cz} \cdot \ddot{\varphi} = M_C^R \quad (5.6)$$



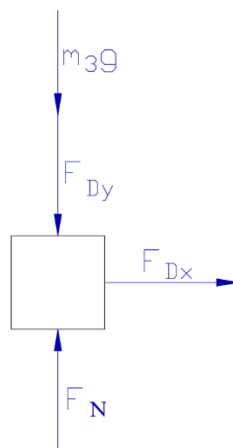
## 6. Dinamička analiza zadanog mehanizma

Potrebno je izvršiti dinamičku analizu mehanizma prikazanog na slici 3.1. Proračun sila je određen tako da je cijeli mehanizam podijeljen na tri dijela: štap AB, štap BD i klizač D [5]. Za izračun je potrebno poznavati mase pojedinih komponenti te ubrzanja. Kutno ubrzanje i ubrzanja točaka koja su potrebna za proračun sila su navedena ispod:

$$a_D = -2509 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}; a_{C1x} = -2468 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}; a_{C1y} = -4275 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}; a_{C2x} = -3722 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}; a_{C2y} = -4278 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}; \varepsilon_{DB} = -10945 \text{ s}^{-2}.$$

### 6.1. Proračun sila u zglobovima mehanizma

Postavljanje izraza je započeto na klizaču zbog jednostavnijeg računa i manjeg broja nepoznanica. Težina, sila klizača i reakcijska sila podloge su sastavni dio prikaza sila na klizaču (slika 6.1).



Slika 6.1 – Prikaz sila na klizaču D

Izrazi sila za klizač D po osi x su:

$$\sum F_x = m_3 \cdot a_D \quad (6.1)$$

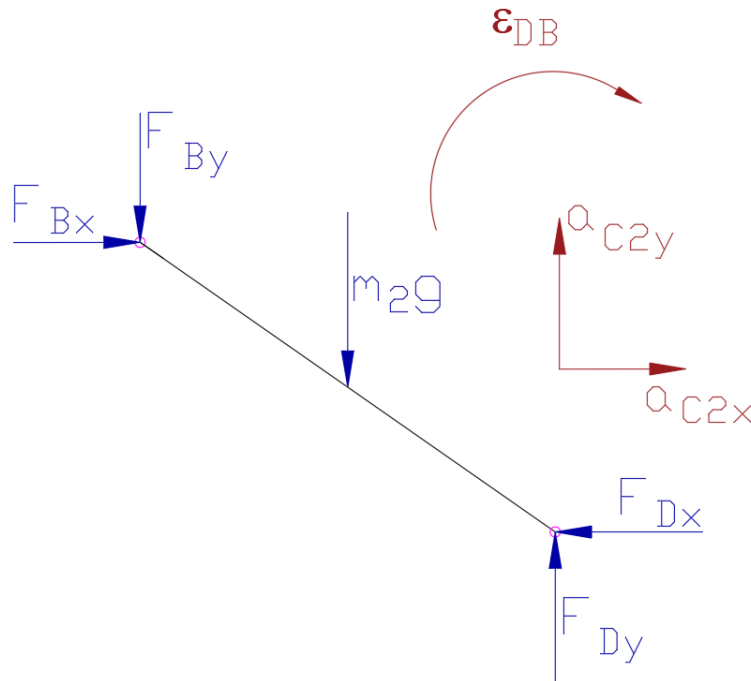
$$F_{Dx} = m_3 \cdot a_D \quad (6.2)$$

Izrazi sila za klizač D po osi y su:

$$0 = -F_{Dy} - m_3 \cdot g + F_N \quad (6.3)$$

$$F_{Dy} = F_N - m_3 \cdot g \quad (6.4)$$

Štap BD je opterećen s tri vertikalne i dvije horizontalne sile. Sile štapa su prikazane na slici 6.2. Jednadžba sile  $F_N$  je izražena pomoću suma sila po osi x, suma sila po osi y te zbroju momenata sile oko točke  $C_2$ .



Slika 6.2 – Prikaz sila na štapu BD

Izrazi sila za štap BD po osi x su:

$$\sum F_x = m_2 \cdot a_{c2x} \quad (6.5)$$

$$F_{Bx} - F_{Dx} = m_2 \cdot a_{c2x} \quad (6.6)$$

$$F_{Bx} = m_2 \cdot a_{c2x} + F_{Dx} \quad (6.7)$$

Izrazi sila za štap BD po osi y su:

$$\sum F_y = m_2 \cdot a_{c2y} \quad (6.8)$$

$$-F_{By} - m_2 \cdot g + F_{Dy} = m_2 \cdot a_{c2y} \quad (6.9)$$

$$-F_{By} - m_2 \cdot g + (F_N - m_3 \cdot g) = m_2 \cdot a_{c2y} \quad (6.10)$$

$$F_{By} = F_N - m_2 \cdot a_{c2y} - m_2 \cdot g - m_3 \cdot g \quad (6.11)$$

Jednadžba momenta sila oko točke  $C_2$  za štap BD glasi:

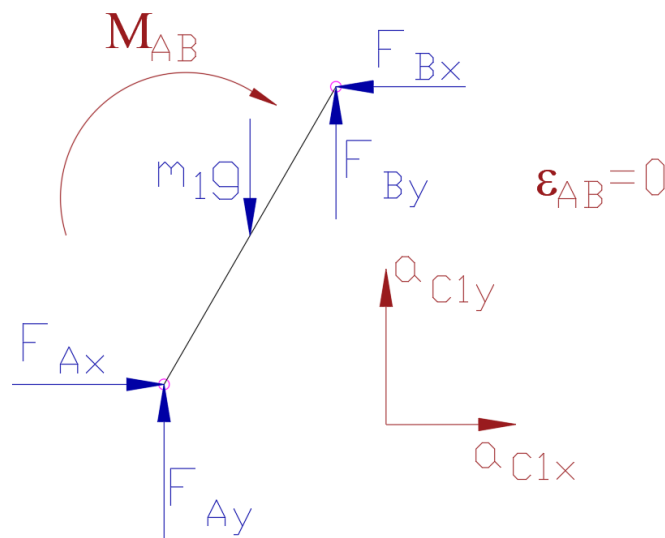
$$\Sigma M_{C_2}^F = I_{C_2} \cdot \varepsilon_{BD} \quad (6.12)$$

$$-F_{By} \cdot \frac{l_2}{2} \cdot \cos \beta + F_{Bx} \cdot \frac{l_2}{2} \cdot \sin \beta + F_{Dx} \cdot \frac{l_2}{2} \cdot \sin \beta - F_{Dy} \cdot \frac{l_2}{2} \cdot \cos \beta = \frac{m_2 \cdot l_2^2}{12} \cdot \varepsilon_{DB} \quad (6.13)$$

$$\begin{aligned} & -\left(F_N - m_2 \cdot a_{c2y} - m_2 \cdot g - m_3 \cdot g\right) \cdot \frac{l_2}{2} \cdot \cos \beta + F_{Bx} \cdot \frac{l_2}{2} \cdot \sin \beta + \\ & + F_{Dx} \cdot \frac{l_2}{2} \cdot \sin \beta - \left(F_N - m_3 \cdot g\right) \cdot \frac{l_2}{2} \cdot \cos \beta = \frac{m_2 \cdot l_2^2}{12} \cdot \varepsilon_{DB} \end{aligned} \quad (6.14)$$

$$F_N = -\frac{m_2 \cdot l_2 \cdot \varepsilon_{DB}}{12 \cdot \cos \beta} + m_3 \cdot g + \frac{m_2 \cdot a_{c2y}}{2} + \frac{m_2 \cdot g}{2} + \frac{F_{Bx} \cdot \tan \beta}{2} + \frac{F_{Dx} \cdot \tan \beta}{2} \quad (6.15)$$

Nakon proračuna štapa BD slijedi proračun štapa AB (slika 6.3):



Slika 6.3 – Prikaz sila na štapu AB

Izrazi sila za štap AB po osi x su:

$$\Sigma F_x = m_1 \cdot a_{c1x} \quad (6.16)$$

$$F_{Ax} - F_{Bx} = m_1 \cdot a_{c1x} \quad (6.17)$$

$$F_{Ax} = m_1 \cdot a_{c1x} + F_{Bx} \quad (6.18)$$

Izrazi sila za štap AB po osi y su:

$$\sum F_y = m_1 \cdot a_{c1y} \quad (6.19)$$

$$F_{Ay} + F_{By} - m_1 \cdot g = m_1 \cdot a_{c1y} \quad (6.20)$$

$$F_{Ay} = m_1 \cdot a_{c1y} - F_{By} - m_1 \cdot g \quad (6.21)$$

Jednadžba momenta sila oko točke C<sub>1</sub> za štap AB:

$$\sum M_C^F = I_C \cdot \varepsilon_{AB} \quad (6.22)$$

$$F_{Bx} \cdot \frac{l_1}{2} \cdot \sin \varphi + F_{By} \cdot \frac{l_1}{2} \cdot \cos \varphi + F_{Ax} \cdot \frac{l_1}{2} \cdot \sin \varphi - F_{Ay} \cdot \frac{l_1}{2} \cdot \cos \varphi + M_{AB} = \frac{m_1 \cdot l_1^2}{12} \cdot \varepsilon_{AB} \quad (6.23)$$

Korištenjem jednadžbi (6.1-6.23) izračunati su iznosi sila s obzirom na kut  $\varphi$ . Za primjer proračuna je korišten kut  $60^\circ$ . A za ostale sile rezultati su navedeni u tablici 6.1.

Isprave su izračunate sile  $F_{Dx}$  i  $F_{Bx}$  pomoću jednadžbi (6.2-6.7) kako bi se omogućilo izračunavanje sile  $F_N$ .

$$F_{Dx} = 3 \cdot (-2509) = -7527 \text{ N}$$

$$F_{Bx} = 4 \cdot (-3722) - 7527 = -22415 \text{ N}$$

Korištenjem jednadžbe 6.15 izračunava se vrijednost sile  $F_N$ :

$$F_N = -\frac{4 \cdot 0,8 \cdot (-10945)}{12 \cdot \cos 25,7^\circ} + 3 \cdot 9,81 + \frac{4 \cdot (-4278)}{2} + \frac{4 \cdot 9,81}{2} + \frac{-22415 \cdot \tan 25,7^\circ}{2} + \frac{-7527 \cdot \tan 25,7^\circ}{2}$$

$$F_N = 3239 + 29,43 - 8556 + 19,62 - 5394 - 1811 = -12473 \text{ N}$$

Nakon što je sila  $F_N$  poznata, izračunate su sile  $F_{Dy}$  i  $F_{By}$  pomoću izraza 6.4 i 6.11.

$$F_{Dy} = -12473 - 3 \cdot 9,81 = -12502 \text{ N}$$

$$F_{By} = -12473 - 4 \cdot (-4278) - 4 \cdot 9,81 - 3 \cdot 9,81 = 4570 \text{ N}$$

Pomoću izraza 6.18 izračunata je sila  $F_{Ax}$  koristeći silu  $F_{Bx}$ :

$$F_{Ax} = -22415 + 2 \cdot (-2468) = -27351 \text{ N}$$

Pomoću izraza 6.21 izračunata je sila  $F_{Ay}$  koristeći već izračunatu silu  $F_{By}$ :

$$F_{Ay} = 2 \cdot (-4275) - 4570 - 2 \cdot 9,81 = -13140 \text{ N}$$

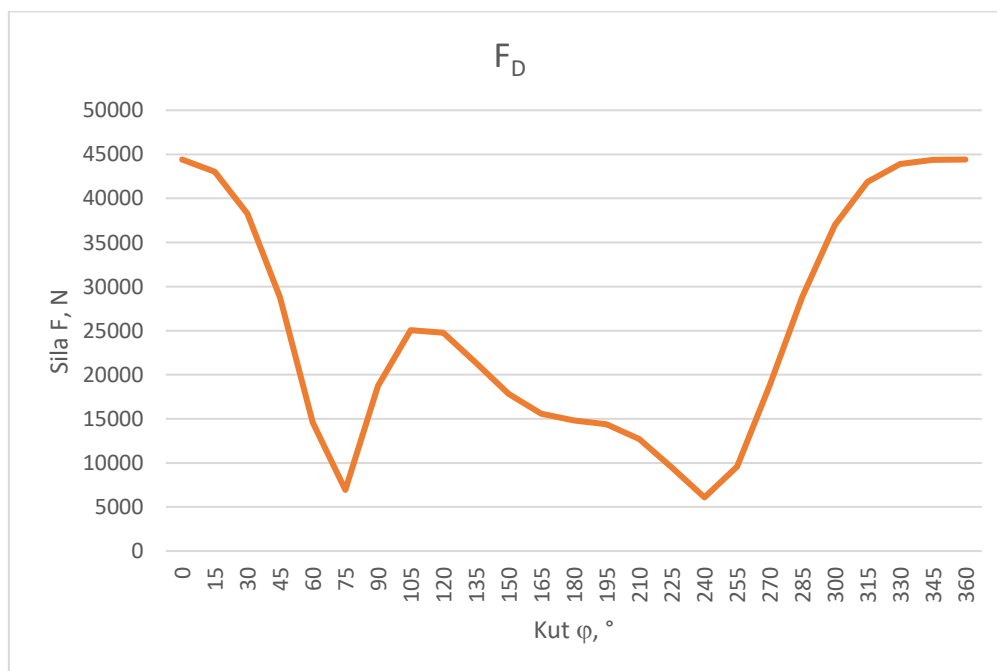
Za provjeru izračuna je korištena jednadžba momenta sila oko točke  $C_1$  iz izraza 6.23. S obzirom da se štap AB giba jednolikom kutnom brzinom, kutno ubrzanje štapa jednako je nuli. Ukoliko je vrijednost lijeve strane jednadžbe približno jednaka nuli, proračun je ispravan.

$$-22415 \cdot 0,2 \cdot \sin 60^\circ + 4570 \cdot 0,2 \cdot \cos 60^\circ - 27351 \cdot 0,2 \cdot \sin 60^\circ + 13140 \cdot 0,2 \cdot \cos 60^\circ + 6850 = 0$$

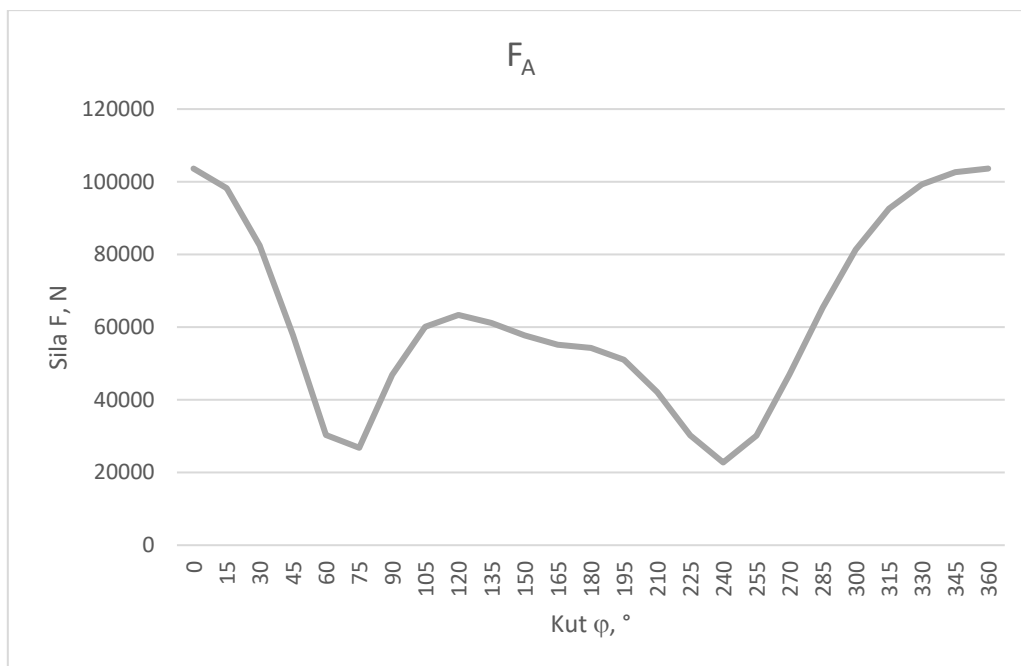
$$-3882 + 457 - 4737 + 1314 + 6850 = 0$$

$$2 \approx 0$$

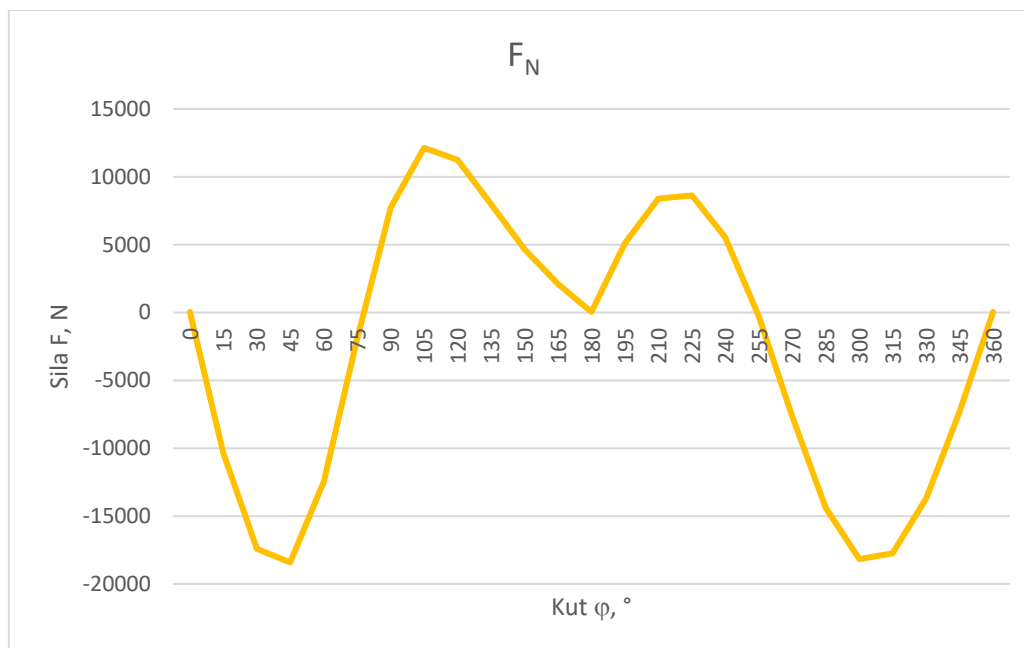
U tablici 6.1 su upisane ostale vrijednosti sila. Na slikama 6.4-6.7 su prikazani dijagrami s opterećenjima mehanizma u zglobovima tijekom jednog okretaja mehanizma. U usporedbi s dijagramom brzina i ubrzanja, veličine sila su dosta povišene na kraju i na početku ciklusa što je uzrok uzimanju konstante vrijednosti za početak rada samog mehanizma.



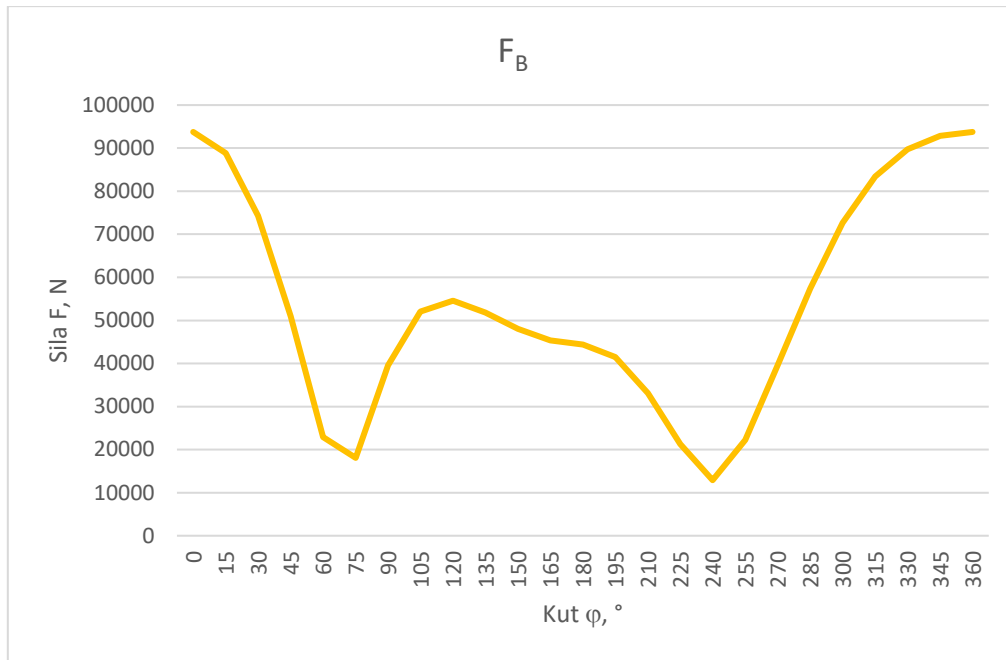
Slika 6.4 – Ovisnost sile u zglobu D o kutu  $\varphi$



Slika 6.5 – Ovisnost sile u zglobu A o kutu  $\varphi$



Slika 6.6 – Ovisnost reakcijske sile podloge na klizaču D o kutu  $\varphi$



Slika 6.7 – Ovisnost sile u zglobu B o kutu  $\varphi$

Tablica 6.1 – Vrijednosti sila zglobova u ovisnosti o kutu  $\varphi$ 

$\varphi$	$\beta$	$F_D$	$F_B$	$F_A$	$F_N$
°	°	N	N	N	N
0	0,0	44413	93761	103631	49
15	7,4	43039	88837	98251	-10357
30	14,5	38258	74238	82438	-17412
45	20,7	28757	50937	57767	-18410
60	25,7	14590	22896	30341	-12461
75	28,9	6926	18046	26767	-1961
90	30,0	18747	39526	46894	7725
105	28,9	25073	52044	60091	12129
120	25,7	24755	54549	63366	11245
135	20,7	21338	51805	61161	7968
150	14,5	17843	48043	57712	4657
165	7,4	15569	45351	55174	2085
180	0,0	14804	44413	54283	49
195	7,4	14363	41455	51056	5114
210	14,5	12718	33110	42127	8386
225	20,7	9479	21285	30226	8633
240	25,7	6085	12892	22764	5546
255	28,9	9594	22265	30153	-295
270	30,0	18731	39553	46956	-7627
285	28,9	28784	57430	65381	-14384
300	25,7	36961	72660	81297	-18160
315	20,7	41855	83402	92600	-17745
330	14,5	43893	89753	99335	-13683
345	7,4	44381	92858	102659	-7328
360	0,0	44413	93761	103631	49



## 7. Zaključak

Usporedbom rezultata kinematičke analize primjećena su manja odstupanja uzrokovana zaokruživanjem pojedinih veličina na jednu decimalu prilikom računanja u radu. Vrijednosti u Excel-tablicama se podudaraju s vrijednostima u proračunu samog rada. Ubrzanja su najveća prilikom početnog i krajnjeg pomaka mehanizma. Razlog tomu je taj što mehanizam prilikom pokretanja ima najveću silu koja ga pokreće te zbog jednog punog okretaja, mehanizam na kraju ima ponovljeno veliko ubrzanje. U dijagramima su prikazana ubrzanja koja pokazuju tijekom početka i kraja jednog okretaja vrhunac veličine ubrzanja. Tijekom samog proračuna zanemaren je utjecaj trenja na sustav čime je omogućena neometana vrtnja mehanizma i rad. Ukoliko bi uzeli trenje u obzir, tijekom cijelog okretaja mehanizma dolazilo bi do otpora kretnje klizača D i sami rezultati bi se promijenili. S vremenom bi došlo do smanjenja brzina i ubrzanja pod utjecajem trenja koje bi uzrokovalo potpuno zaustavljanje mehanizma.

Dinamička analiza prikazuje veličine sila koje imaju velike vrijednosti u zglobovima A i B, osobito prilikom početne kretnje mehanizma. Uzrok tomu su vrijednosti ubrzanja prilikom početne kretnje mehanizma. Vrijednosti sila u zglobu D su dosta manje u usporedbi s drugim zglobovima što je uzrok smanjenja opterećenja prijelazom iz jednog zgloba u drugi. Glavni razlog velikog opterećenja u zglobu A je pogon sustava koji počinje rotacijom zgloba. Opterećenja nastala reakcijom rada mehanizma bi uzrokovala veliko trošenje materijala ili pak ležaja u samim zglobovima mehanizma. Također bi sami klizač ili podloga imali popriličnu potrošnju materijala s obzirom na kretnje klizača.

## Literatura

- [1] Plazibat B.; Matoković A.; Vetma V.: *Tehnička Mehanika II Kinematika i dinamika*, skripta, Sveučilišni odjel za stručne studije, Split, 2019.
- [2] Jecić S.: *Mehanika II – Kinematika i dinamika*, tehnička knjiga, Zagreb, 1989.
- [3] Bedford A.; Fowler W.: *Engineering mechanics – Dynamics, Second Edition*, Addison Wesley, Menlo Park, California, 1998.
- [4] Meriam J.L.; Kraige L.G.: *Engineering mechanics-Dynamics, Fourth Edition-SI Version*, Wiley & Sons, New York, 1998.
- [5] Osobne bilješke iz kolegija *Tehnička Mehanika II* tijekom trajanja studija, 2019.

## Prilozi

1. Prilog 1 – Vrijednosti brzina koristeći plan brzina u ovinosti o kutu  $\varphi$
2. Prilog 2 – Vrijednosti ubrzanja koristeći plan ubrzanja u ovinosti o kutu  $\varphi$
3. Prilog 3 – Vrijednosti brzina koristeći parametarske jednadžbe gibanja u ovinosti o kutu  $\varphi$
4. Prilog 4 – Vrijednosti ubrzanja koristeći parametarske jednadžbe gibanja u ovinosti o kutu  $\varphi$
5. Prilog 5 – Reakcije sila zglobova u ovinosti o kutu  $\varphi$