

# ANALIZA POMAKA I NAPREZANJA RELATIVNO KRATKIH ŠTAPOVA TANKOSTJENOG OTVORENOG POPREČNOG PRESJEKA

---

Miličević, Josip

Undergraduate thesis / Završni rad

2021

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Split / Sveučilište u Splitu**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:228:040025>

Rights / Prava: [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-01-10**



Repository / Repozitorij:

[Repository of University Department of Professional Studies](#)



**SVEUČILIŠTE U SPLITU**  
**SVEUČILIŠNI ODJEL ZA STRUČNE STUDIJE**

Preddiplomski stručni studij Konstrukcijsko strojarstvo

**JOSIP MILIČEVIĆ**

**ZAVRŠNI RAD**

**ANALIZA POMAKA I NAPREZANJA RELATIVNO  
KRATKIH ŠTAPOVA TANKOSTJENOG  
OTVORENOG POPREČNOG PRESJEKA**

Split, ožujak 2021.

**SVEUČILIŠTE U SPLITU**  
**SVEUČILIŠNI ODJEL ZA STRUČNE STUDIJE**

Preddiplomski stručni studij Konstrukcijsko strojarstvo

**Predmet:** Nauka o čvrstoći

**Z A V R Š N I R A D**

**Kandidat:** Josip Miličević

**Naslov rada:** Analiza pomaka i naprezanja relativno kratkih štapova  
tankostjenog otvorenog poprečnog presjeka

**Mentor:** Ado Matoković

Split, ožujak 2021.

**REPUBLIKA HRVATSKA**  
**SVEUČILIŠTE U SPLITU**  
**Sveučilišni odjel za stručne studije**

**Studij:** Konstrukcijsko strojarstvo  
**Predmet:** Nauka o čvrstoći  
**Nastavnik:** Ado Matoković, prof. v. š. u t. z.

**ZADATAK**

**Kandidat:** Josip Miličević

**Zadatak:** Analiza pomaka i naprezanja relativno kratkih štapova tankostjenog otvorenog poprečnog presjeka

U radu je potrebno:

- odrediti dijagrame unutarnjih sila za linijski nosač zadanog poprečnog presjeka, uklješten na krajevima i opterećen jednoliko raspodijeljenim kontinuiranim opterećenjem;
- odrediti progibnu funkciju rješavanjem diferencijalne jednačbe elastične linije;
- za različite omjere duljine štapa i širine poprečnog presjeka usporediti izraze za normalno naprezanje korištene u Nauci o čvrstoći s izrazima za normalno naprezanje koji uključuju utjecaj smicanja, a koji su preuzeti iz literature;
- za različite omjere duljine štapa i širine poprečnog presjeka usporediti izraze za progib korištene u Nauci o čvrstoći s izrazima koji uključuju utjecaj smicanja, a koji su preuzeti iz literature.

## Sažetak

U radu je izvršena analiza pomaka i naprezanja štapova tankostjenog otvorenog poprečnog presjeka i to prema dva različita izraza, za tri različite varijante dimenzija štapova. U uvodnom dijelu rada ukratko su opisani linijski nosači, objašnjena je statička određenost i neodređenost nosača te je navedena diferencijalna jednadžba savijanja elastične linije.

Nakon određivanja izraza za progib te izračunavanja sila te izraza za sile na štapu, izračunata su naprezanja te progibi štapova prema dva različita izraza. Prvi izraz je onaj koji ne uključuje utjecaj smicanja na štapova, dok drugi izraz isto uključuje. Osim za poprečni presjek štapa s dvije osi simetrije, isto je izračunato i za poprečni presjek štapa s jednom osi simetrije.

Uz izračune, također su izrađeni i dijagrami koji prikazuju vrijednosti naprezanja te progiba štapova cijelom duljinom istih.

Ključne riječi: linijski nosač, naprezanja, progibi, štapovi,

## **Summary (Displacement and stress analysis of relatively short rods of thin-walled open cross section)**

The paper analyzes the displacement and stress of rods of thin - walled open cross section according to two different expressions, for three different variants of rod dimensions. In the introductory part of the paper, line beams are briefly described, static definiteness and indeterminacy of beams are explained, and the differential equation of bending of an elastic line is given. After determining the expression for deflection and calculating the forces and the expression for forces on the rod, the stresses and deflections of the rods were calculated according to two different expressions. The first term is one that does not include the effect of shear on the rods, while the second term also includes. In addition to the cross section of a rod with two axes of symmetry, the same was calculated for the cross section of a rod with one axis of symmetry. In addition to the calculations, diagrams were also made showing the values of stress and deflection of the rods along their entire length.

Keywords: line beams, stresses, deflections, rods

# SADRŽAJ

Sažetak .....	iv
1. Uvod.....	9
1.1. Linijski nosači.....	9
1.2. Statička određenost i neodređenost .....	10
1.3. Diferencijalna jednačba savijanja elastične linije.....	11
2. Izračunavanje unutarnjih sila te progiba statički neodređenog linijskog nosača opterećenog jednoliko raspodijeljenim kontinuiranim opterećenjem .....	12
2.1. Određivanje reakcija i dijagrami unutarnjih sila .....	12
3. Izračunavanje normalnih naprezanja po poprečnom presjeku nosača .....	18
3.1. Usporedba naprezanja prema dva različita izraza .....	18
3.2. Zadani I profil s dvije osi simetrije te geometrijske karakteristike .....	18
3.3. Prva varijanta - omjer $l/b = 4$ .....	22
3.4. Druga varijanta - omjer $l/b = 8$ .....	22
3.5. Treća varijanta – omjer $l/b = 12$ .....	23
3.6. Usporedba naprezanja struka I profila na mjestu uklještenja prema tri različite varijante .....	23
3.7. Usporedba naprezanja donjeg pojasa I profila na mjestu uklještenja prema tri varijante .....	28
3.8. Usporedba naprezanja struka I profila na sredini štapu prema tri varijante .....	29
3.9. Usporedba naprezanja donjeg pojasa I profila na sredini štapu prema tri varijante ..	31
3.10. Analiza utjecaja smicanja na iznose normalnih naprezanja za različite omjere $l/b$	32
4. Progibi štapu.....	35
4.1. Izrazi za progibe .....	35
4.2. Progibi za prvu varijantu $l/b=4$ .....	36
4.3. Progibi za drugu varijantu $l/b=8$ .....	37

4.4.	Progibi za treću varijantu $l/b = 12$ .....	39
4.5.	Analiza utjecaja smicanja na progibe za različite omjere $l/b$ .....	40
5.	Zadani I profil s jednom osi simetrije .....	42
5.1.	Geometrijske karakteristike I profila s jednom osi simetrije.....	42
5.2.	Izrazi za naprezanja štapa poprečnog presjeka s jednom osi simetrije.....	44
5.3.	Izračunavanje naprezanja štapa poprečnog presjeka s jednom osi simetrije.....	45
5.4.	Progibi štapa s poprečnim presjekom s jednom osi simetrije.....	49
6.	Zaključak.....	51
	Literatura .....	53
	Prilozi .....	54

## Popis slika

SLIKA 1.1 – PRIMJER LINIJSKOG NOSAČA OPTEREĆENOG KONTINUIRANIM OPTEREĆENJEM TE UKLIJEŠTENIM NA OBA KRAJA .....	9
SLIKA 1.2 – SMJER UNUTARNJIH SILA LINIJSKIH NOSAČA .....	10
SLIKA 2.1 – ŠTAP OPTEREĆEN KONTINUIRANIM OPTEREĆENJEM I UKLIJEŠTEN NA OBA KRAJA .....	12
SLIKA 2.2 – LINIJSKI NOSAČ OSLOBOĐEN OD VEZA S PRIKAZOM SVIH SILA.....	12
SLIKA 2.3 – OPTEREĆENJE I IZRAZI ZA PROGIB I NAGIB KONZOLNOG NOSAČA .....	13
SLIKA 2.4 – ODSJEČENI DIO NOSAČA.....	15
SLIKA 2.5 – DIJAGRAM UNUTRAŠNJIH SILA NOSAČA.....	17
SLIKA 3.1 – ZADANI I PROFIL S DVIJE OSI SIMETRIJE.....	19
SLIKA 3.2 – RASPODJELA NAPREZANJA PO POPREČNOM PRESJEKU .....	21
SLIKA 3.3 – DEFINIRANJE PREDZNAKA KOORDINATA $s_z$ , $s_y$ I $s_\alpha$ .....	21
SLIKA 3.4 – PRVA VARIJANTA L/B=4.....	22
SLIKA 3.5 – DRUGA VARIJANTA L/B=8.....	23
SLIKA 3.6 – TREĆA VARIJANTA L/B=12.....	23
SLIKA 3.7 – ZADANI I PROFIL S OZNAČENIM STRUKOM PROFILA .....	24
SLIKA 3.8 – DIJAGRAM NAPREZANJA STRUKA NA MJESTU UKLIJEŠTENJA .....	25
SLIKA 3.9 – DIJAGRAM NAPREZANJA STRUKA NA MJESTU UKLIJEŠTENJA ZA VARIJANTU L/B=8.....	26
SLIKA 3.10 – DIJAGRAM NAPREZANJA STRUKA NA MJESTU UKLIJEŠTENJA ZA VARIJANTU L/B=12.....	27
SLIKA 3.11 – ZADANI I PROFIL S OZNAČENIM DONJIM POJASOM PROFILA .....	28
SLIKA 3.12 – DIJAGRAM NAPREZANJA DONJEG POJASA NA MJESTU UKLIJEŠTENJA .....	29
SLIKA 3.13 – DIJAGRAM NAPREZANJA STRUKA NA SREDINI ŠTAPA .....	30
SLIKA 3.14 – DIJAGRAM NAPREZANJA DONJEG POJASA NA SREDINI ŠTAPA ZA VARIJANTU L/B=4 .....	32
SLIKA 4.1 – DIJAGRAM PROGIBA ŠTAPA ZA VARIJANTU L/B=4 PREMA DVA IZRAZA.....	37
SLIKA 4.2 – DIJAGRAM PROGIBA ŠTAPA ZA VARIJANTU L/B=8 PREMA DVA IZRAZA.....	38
SLIKA 4.3 – DIJAGRAM PROGIBA ŠTAPA ZA VARIJANTU L/B=12 PREMA DVA IZRAZA.....	40
SLIKA 4.4 – DIJAGRAM PROGIBA ŠTAPA ZA DULJINU ŠTAPA 2400 MM PREMA DVA IZRAZA .....	41
SLIKA 5.1 – I PROFIL S JEDNOM OSI SIMETRIJE .....	42
SLIKA 5.2 – RASPORED NAPREZANJA PO POPREČNOM PRESJEKU I PROFILA .....	44
SLIKA 5.3 – DIJAGRAM NAPREZANJA PO POPREČNOM PRESJEKU GORNJEG POJASA.....	46
SLIKA 5.4 – DIJAGRAM NAPREZANJA PO POPREČNOM PRESJEKU STRUKA .....	47
SLIKA 5.5 – DIJAGRAM NAPREZANJA PO POPREČNOM PRESJEKU DONJEG POJASA .....	48
SLIKA 5.6 – DIJAGRAM VRIJEDNOSTI PROGIBA ZA POPR.PRESJEK S JEDNOM OSI SIMETRIJE .....	50



## Popis tablica

TABLICA 3.1 – DIMENZIJE I PROFILA.....	19
TABLICA 3.2 – ULAZNI PARAMETRI ZA PRORAČUN NAPREZANJA .....	20
TABLICA 3.3– IZRAZI ZA VRIJEDNOSTI INTEGRALA NAPREZANJA.....	20
TABLICA 3.4 – NAPREZANJA STRUKA NA MJESTU UKLJEŠTENJA .....	24
TABLICA 3.5 – NAPREZANJA STRUKA NA MJESTU UKLJEŠTENJA ZA VARIJANTU L/B=8.....	26
TABLICA 3.6 – NAPREZANJA STRUKA NA MJESTU UKLJEŠTENJA ZA VARIJANTU L/B=12.....	27
TABLICA 3.7 – NAPREZANJA DONJEG POJASA NA MJESTU UKLJEŠTENJA .....	28
TABLICA 3.8 – NAPREZANJA STRUKA NA SREDINI ŠTAPA .....	30
TABLICA 3.9 – NAPREZANJA DONJEG POJASA NA SREDINI ŠTAPA.....	31
TABLICA 3.10 – ANALIZA USPOREDBE NAPREZANJA PREMA OMJERU $\sigma_1/\sigma_2$ ZA NAPREZANJA STRUKA	33
TABLICA 3.11– ANALIZA USPOREDBE NAPREZANJA PREMA OMJERU $\sigma_1/\sigma_2$ ZA NAPREZANJA DONJEG POJASA .....	34
TABLICA 4.1 – PROGIBI ŠTAPA NA 16 RAZLIČITIH TOČAKA VARIJANTU L/B=4 PREMA DVA IZRAZA ....	36
TABLICA 4.2 – PROGIBI ŠTAPA NA 16 RAZLIČITIH TOČAKA VARIJANTU L/B=8 PREMA DVA IZRAZA ....	37
TABLICA 4.3 – PROGIBI ŠTAPA NA 16 RAZLIČITIH TOČAKA VARIJANTU L/B=12 PREMA DVA IZRAZA ..	39
TABLICA 5.1 – DIMENZIJE I PROFILA S JEDNOM OSI SIMETRIJE.....	43
TABLICA 5.2 – KARAKTERIKE PROFILA.....	43
TABLICA 5.3 – MIJENJANJE IZRAZA ZA INTEGRAL $\int_0^{S_z} \frac{S_y}{t} ds$ PREMA POLOŽAJU NAPREZANJA.....	45
TABLICA 5.4 – NAPREZANJA ŠTAPA U GORNJEM POJASU .....	46
TABLICA 5.5 – NAPREZANJA ŠTAPA U STRUKU POPREČNOG PRESJEKA ŠTAPA .....	47
TABLICA 5.6 – NAPREZANJA ŠTAPA U DONJEM POJASU POPREČNOG PRESJEKA ŠTAPA .....	48
TABLICA 5.7 – VRIJEDNOSTI PROGIBA ZA POPREČNI PRESJEK S JEDNOM OSI SIMETRIJE.....	49

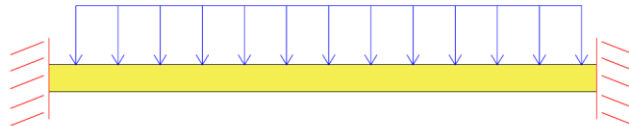
# 1. Uvod

Kroz ovaj završni rad, analizirati će se pomak i naprezanja relativno kratkih štapova te usporedba naprezanja te progiba prema dva različita izraza, od kojih jedan uključuje utjecaj smicanja dok drugi ne uključuje. Isto tako, u cilju usporedbe dane su tri varijante poprečnog presjeka štapa.

## 1.1. Linijski nosači

Linijski nosači prema složenosti i načinu oslanjanja mogu biti:

- jednostavni nosači kod kojih je udaljenost između oslonaca ujedno i ukupna duljina nosača;
- nosači s jednim ili dva prepusta kod kojih je udaljenost između oslonaca manja od duljine nosača;
- konzolni nosači (konzole) jesu nosači koji su jednim krajem ukliješteni
- nosači sa zglobom (Gerberovi nosači) jesu složeni nosači koji su sastavljeni iz jedne ili više greda međusobno povezanih zglobovima.



*Slika 1.1 – Primjer linijskog nosača opterećenog kontinuiranim opterećenjem te ukliještenim na oba kraja*

Što se tiče koordinatnog sustava nosača, isti je dogovorom uzet tako da se os  $x$  poklapa s uzdužnom osi nosača, os  $y$  izlazi iz slike dok os  $z$  je usmjerena prema dolje.

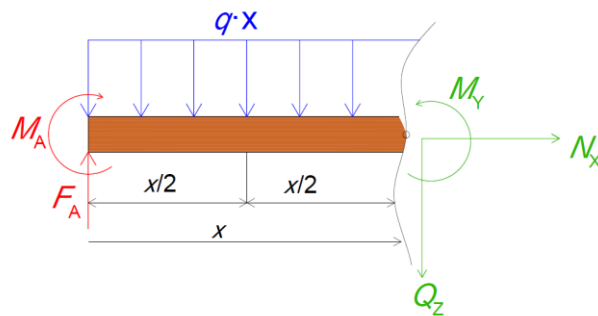
Prilikom računanja naprezanja linijskih nosača, potrebno je odrediti reakcije veza odnosno odrediti vrijednosti sila koje djeluju na nosač prilikom određenog opterećenja na isti.

Osim računanja vanjskih sila odnosno reakcija veza, potrebno je odrediti i unutarnje sile koje uvijek djeluju u paru te se nalaze u ravnoteži. Iste se izračunava putem pojave istih u proizvoljnom presjeku nosača.

Unutarnje sile se dijele na tri komponente:

- jedna sila paralelna s uzdužnom osi koja se označava sa  $N$ ,
- druga sila koja je okomita na uzdužnu os koja se označava sa  $Q_z$ ,
- moment savijanja koji se označava sa  $M_y$ .

Pozitivne unutarnje sile u proizvoljnom presjeku linijskog nosača prikazane su na slici 1.2.



Slika 1.2 – Smjer unutarnjih sila linijskih nosača

## 1.2. Statička određenost i neodređenost

Da bi tijelo pod djelovanjem nekog sustava sila bilo u ravnoteži potrebno je da zbroj projekcija svih sila na proizvoljne odabrane koordinatne osi i zbroj momenata svih sila oko tih koordinatnih osi bude jednak nuli. Kada se postavljaju jednačbe, prvo se postave jednačbe sila odnosno uvjet da su zbrojevi svake od sila pojedinačno u određenoj koordinatnoj osi jednake 0. Zatim druge tri jednačbe koje uvjetuju da je zbroj momenata oko svake od osi  $x$ ,  $y$  i  $z$  jednak 0.

Preko tih jednačbi može se dobiti vrijednost svake od sila ukoliko je broj nepoznatih reakcija jednak broju postavljenih jednačbi. Međutim, ako u nekoj konstrukciji postoji neki broj nepoznatih reakcija veza odnosno nepoznatih sila  $k$ , a konstrukcija ima  $s$  stupnjeva slobode gibanja, stupanj statičke neodređenosti  $n$  određen je izrazom:  $n = k - s$

Pa tako, ako je primjerice  $n=2$ , zadatak je dva puta statički neodređen. U tom slučaju potrebno je postaviti  $n$  dopunskih uvjeta deformacija. Dopunske uvjete deformacija se dodaje pod pretpostavkom da pojedini dijelovi konstrukcija se moraju pomicati zajedno, dok neke točke ostaju nepomične u toku deformiranja tijela.

Pri postavljanju uvjeta deformacije, često se koristi metoda superpozicije. Odnosno, kreće se od pretpostavke da ukoliko je neko tijelo opterećeno s više sila, pomak neke točke se može odrediti tako da se odredi pomak te točke pod djelovanjem svake pojedinačne sile, a

rezultat se zbroji. Ova metoda se koristi kod konstrukcija kod kojih pomaci linearno ovise o opterećenju.

### 1.3. Diferencijalna jednadžba savijanja elastične linije

Štap se promatra kao elastična linija kada pod opterećenjem, uzdužna os štapa, postane zakrivljena. Isto tako, pomaci uzdužne osi nosača u smjeru osi  $z$  nazivaju se progibi te se označavaju s  $w$ .

Izraz koji predstavlja diferencijalnu jednadžbu elastične linije preuzet je iz literature i glasi:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{M_y}{E \cdot I_y}$$

Integriranjem ove jednadžbe mogu se dobiti progib i nagib u bilo kojoj točki grede

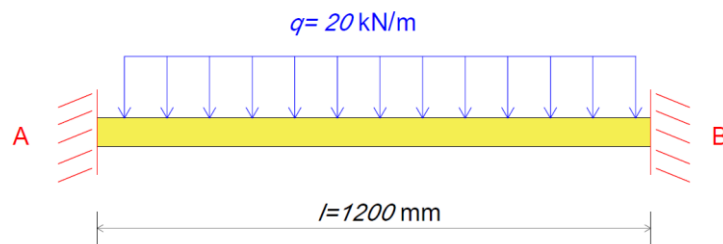
$$\frac{dw}{dx} = \frac{1}{E \cdot I_y} \int \frac{M_y}{E \cdot I_y} dx + C_1, \quad \beta(x) = -\frac{dw}{dx};$$

$$w(x) = \frac{1}{E \cdot I_y} \int \left( \int \frac{M_y}{E \cdot I_y} dx + C_1 \right) dx + C_2$$

Pri integriranju javljaju se dvije konstante integracije koje se određuju iz rubnih uvjeta.

## 2. Izračunavanje unutarnjih sila te progiba statički neodređenog linijskog nosača opterećenog jednoliko raspodijeljenim kontinuiranim opterećenjem

Promatrati će se nosač opterećen kontinuiranim opterećenjem zadanog poprečnog presjeka koji je ukliješten na oba kraja. Tijekom analize mijenjati će se određeni parametri kao duljina štapa  $l$  te još neke geometrijske veličine u poprečnom presjeku štapa kako bi se analizirao utjecaj istih na naprezanja i progibe.

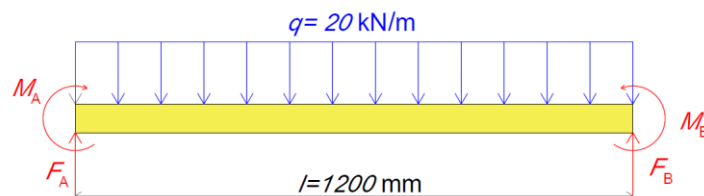


Slika 2.1 – Štap opterećen kontinuiranim opterećenjem i ukliješten na oba kraja

### 2.1. Određivanje reakcija i dijagrami unutarnjih sila

Promatra se štap koji je dva puta statički neodređen, da bi se dobile unutarnje sile potrebno je osloboditi gredu od veza.

Prvo se postavljaju uvjeti ravnoteže za vanjske sile i to kao suma svih sila po osi  $z$  te suma svih momenata u točki A.



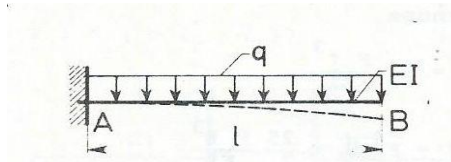
Slika 2.2 – Linijski nosač oslobođen od veza s prikazom svih sila

$$\sum F_z = 0: q \cdot l - F_A - F_B = 0$$

$$\sum M_A = 0: -M_A + M_B + F_B \cdot l - q \cdot \frac{l^2}{2} = 0.$$

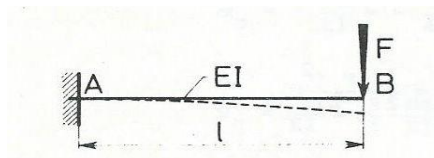
Međutim, iz navedenih uvjeta nije moguće dobiti sve nepoznanice, pa je potrebno postaviti dodatni uvjet. To se radi na način da će se u osloncu  $B$  zamijeniti oslonac sa silom i momentom kako bi se metodom superpozicije, iz uvjeta da ukupni progib i ukupni nagib moraju biti 0, odredilo koliki je moment i sila u osloncu  $B$ .

Prema tablici u prilogu 1. postavljaju se uvjeti za progib i nagib te će to činiti prvu odnosno drugu jednačbu u nastavku:



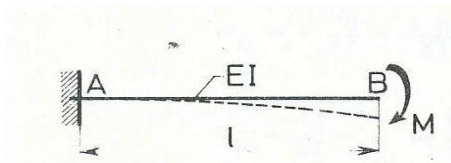
$$w = \frac{ql^4}{8EI}; \quad \beta = -\frac{ql^3}{6EI}$$

+



$$w = -\frac{F_B l^3}{3EI}; \quad \beta = \frac{F_B l^2}{2EI}$$

+



$$w = -\frac{M_B l^2}{2EI}; \quad \beta = \frac{M_B l}{EI}$$

Slika 2.3 – Opterećenje i izrazi za progib i nagib konzolnog nosača

$$w_B = 0; \quad w_B^q + w_B^{F_B} + w_B^{M_B} = 0$$

$$\beta_B = 0; \quad \beta_B^q + \beta_B^{F_B} + \beta_B^{M_B} = 0$$

Konačno, jednađbe glase:

$$\frac{ql^4}{8EI} - \frac{F_B l^3}{3EI} - \frac{M_B l^2}{2EI} = 0 / \cdot (24EI)$$

$$-\frac{ql^3}{6EI} + \frac{F_B l^2}{2EI} + \frac{M_B l}{EI} = 0 / \cdot (12EI)$$

Rješavanjem navedenih jednađbi, svodimo ih na sljedeći oblik

$$3ql^2 - 8F_B l - 12M_B = 0$$

$$-2ql^2 + 6F_B l + 12M_B = 0$$

Zbrajanjem navedenih jednađbi dobije se sila  $F_B$ :

$$ql^2 = 2F_B l / : 2l$$

$$F_B = \frac{ql}{2}$$

dok moment  $M_B$  glasi:

$$12M_B = 3ql^2 - 4ql^2$$

$$M_B = -\frac{ql^2}{12}$$

Nakon što su dobiveni moment te sila u osloncu  $B$ , vraćanjem u uvjete ravnoteže dobiti će se vrijednost momenata te sila u osloncu  $A$ :

$$\sum F_z = 0: \quad q \cdot l - F_A - F_B = 0$$

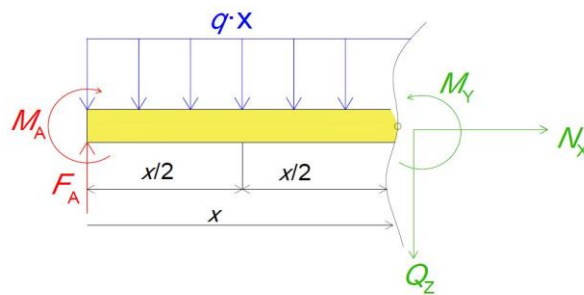
$$\sum M_A = 0; \quad -M_A + M_B + F_B \cdot l - q \cdot \frac{l^2}{2} = 0$$

$$F_A = \frac{ql}{2}$$

$$M_A = -\frac{ql^2}{12} + \frac{ql}{2} \cdot \frac{ql}{2}$$

$$M_A = -\frac{ql^2}{12}$$

Kada su određene sve vanjske sile te momenti koji djeluju na nosač, potrebno je napraviti presjek štapa  $[0 \text{ m} < x < 0,6 \text{ m } (l/2)]$  kako bi se dobio izraz za maksimalni moment.



Slika 2.4 – Odsječeni dio nosača

$$\sum M_P = 0; \quad M_y - M_A - F_A \cdot x + q \cdot \frac{x^2}{2} = 0$$

$$M_y = -\frac{ql^2}{12} + \frac{ql}{2} \cdot x - q \cdot \frac{x^2}{2}$$

Nadalje se moment uvrštava u diferencijalnu jednadžbu elastične linije kako bi se u konačnici dobio izraz za maksimalni progib:

$$\frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{M_y}{E \cdot I_y}$$

$$EI \frac{d^2w}{dx^2} = -M_y = \frac{1}{12} ql^2 - \frac{1}{2} qlx + \frac{1}{2} qx^2 / \int$$

$$EI \frac{dw}{dx} = \frac{1}{12} ql^2 x - \frac{1}{4} qlx^2 + \frac{1}{6} qx^3 + C_1 / \int$$



$$E \cdot I \cdot w = \frac{1}{24} \cdot q \cdot l^2 \cdot x^2 - \frac{1}{12} \cdot q \cdot l \cdot x^3 + \frac{1}{24} \cdot q \cdot x^4 + C_1 \cdot x + C_2$$

Konstante integracije  $C_1$  i  $C_2$  dobivene su iz rubnih uvjeta:

$$x = 0; \quad w_A = 0 \Rightarrow C_1 = C_2 = 0$$

$$E \cdot I \cdot w = \frac{1}{24} \cdot q \cdot l^2 \cdot x^2 - \frac{1}{12} \cdot q \cdot l \cdot x^3 + \frac{1}{24} \cdot q \cdot x^4$$

$$w(x) = \frac{1}{E \cdot I_y} \cdot \left( \frac{1}{24} \cdot q \cdot l^2 \cdot x^2 - \frac{1}{12} \cdot q \cdot l \cdot x^3 + \frac{1}{24} \cdot q \cdot x^4 \right)$$

$$w(x) = \frac{q \cdot l^4}{24 \cdot E \cdot I_y} \cdot \left[ \left( \frac{x}{l} \right)^2 - 2 \cdot \left( \frac{x}{l} \right)^3 + \left( \frac{x}{l} \right)^4 \right] \quad (2.1)$$

$$x = \frac{l}{2}; \quad w_{\max}$$

$$w_{\max} = \frac{1}{E \cdot I} \left( \frac{1}{24} q \cdot l^2 \cdot \frac{l^2}{4} - \frac{1}{12} q \cdot l \cdot \frac{l^3}{8} + \frac{1}{24} q \cdot \frac{l^4}{16} \right)$$

$$w_{\max} = \frac{1}{E \cdot I} \left( \frac{q \cdot l^4}{96} - \frac{q \cdot l^4}{96} + \frac{q \cdot l^4}{384} \right)$$

Maksimalni progib se nalazi na sredini štapa te iznosi:

$$w_{\max} = \frac{q \cdot l^4}{384 \cdot E \cdot I_y} \quad (2.2)$$

Potrebno je ponovno vratiti se u jednadžbu suma svih momenata odsječenog dijela nosača kako bi se odredila vrijednost maksimalnog momenta  $M_{y,\max}$ :

$$M_y = -\frac{q \cdot l^2}{12} + \frac{q \cdot l}{2} \cdot x - q \cdot \frac{x^2}{2} = 0$$

$$M_{y,\max} = -2,4 + 12 \cdot 0,6 - \frac{20}{2} \cdot 0,6^2$$

$$M_{y\max} = 1,2 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

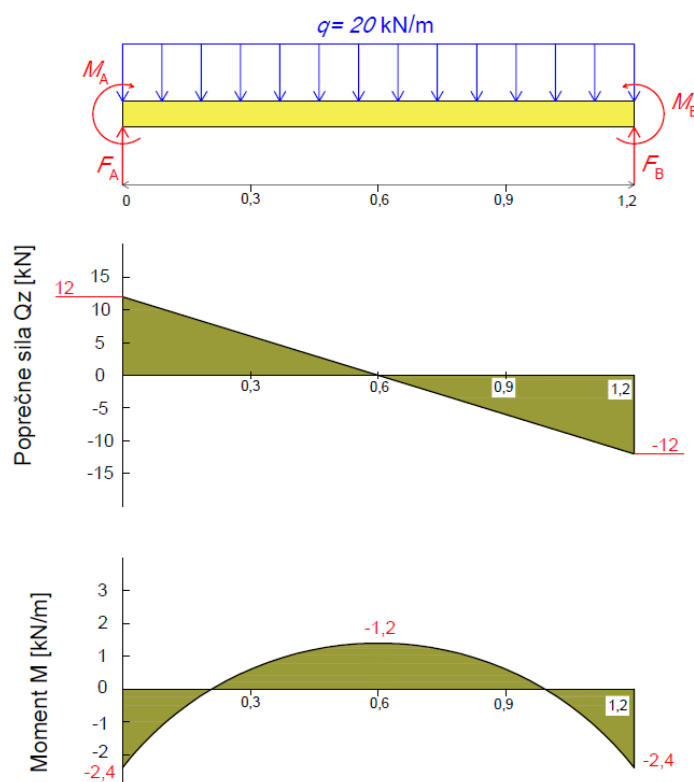
Nakon što je metodom presjeka određen iznos maksimalnog momenta, potrebno je odrediti i iznos poprečne sile na način da će se postaviti jednačina kada je suma svih sila po  $z$  osi jednaka nuli.

$$\sum F_z = 0: -F_A + q \cdot x + Q_z = 0$$

$$Q_z = F_A - q \cdot x$$

$$Q_z(0,6) = 0 \text{ kN}$$

Prema navedenom proračunu unutrašnjih sila, crta se dijagram raspodjele unutrašnjih sila po presjeku:



Slika 2.5 – Dijagram unutrašnjih sila nosača

### 3. Izračunavanje normalnih naprezanja po poprečnom presjeku nosača

U nastavku će se računati naprezanja štapa prema dva različita izraza. Prvi izraz će biti klasični izraz prema kojem se izračunavaju naprezanja za relativno duge štapove prema Nauci o čvrstoći, dok će drugi izraz biti s utjecajem smicanja štapa. Cilj je usporedba krajnjih rezultata ovih dvaju izraza te analiziranje koliko smicanje utječe na naprezanja štapa te u kolikoj mjeri i kada se može zanemariti utjecaj istoga, a isto tako kada se smicanje očituje kao značajniji parametar naprezanja. Kako bi se pobliže promotrio utjecaj različitih parametara (kao što su primjerice visina, duljina, širina štapa) na izračune te u kojoj mjeri i na koji način utječu na naprezanja, parametri će se mijenjati tijekom proračuna.

#### 3.1. Usporedba naprezanja prema dva različita izraza

Prvi izraz za naprezanje je prema Nauci o čvrstoći:

$$\sigma_1 = \frac{M_y}{I_y} \cdot z, \quad (3.1)$$

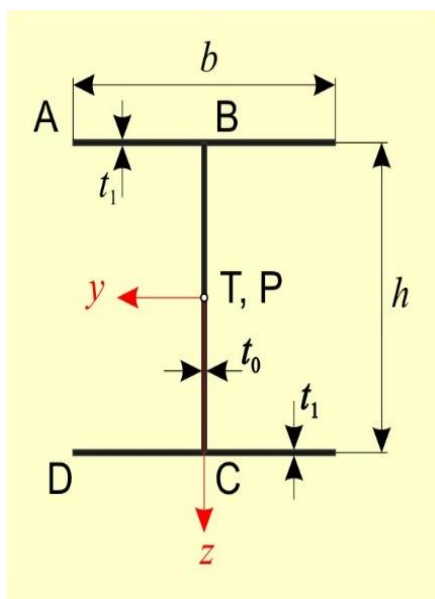
Drugi izraz s utjecajem smicanja štapa preuzet je iz literature:

$$\sigma_2 = \frac{M_y}{I_y} \cdot z + q_z \cdot k_{zz} \frac{E}{G \cdot A} \cdot z - q_z \frac{E}{G \cdot I_y} \cdot \int_0^{S_z} \frac{S_y}{t} ds, \quad (3.2)$$

Drugi izraz sadržava i utjecaj smicanja na naprezanje, te će se prilikom analize promatrati naprezanja zasebno gornjeg dijela štapa, donjeg dijela štapa te struka.

#### 3.2. Zadani I profil s dvije osi simetrije te geometrijske karakteristike

Zadani profil je tankostijeni I profil s dvije osi simetrije, a dimenzije su prema Tablici 3.1.



Slika 3.1 – Zadani I profil s dvije osi simetrije

Tablica 3.1 – Dimenzije I profila

Dimenzije zadanog profila prema slici 3.1.		
visina struka $h$	mm	80
debljina struka $t_0$	mm	4
debljina pojasa $t_1$	mm	5
širina pojasa $b$	mm	100
Površina pojasa $A_1$	mm <sup>2</sup>	500
Površina struka $A_0$	mm <sup>2</sup>	320
Ukupna površina $A$	mm <sup>2</sup>	1320

Potrebno je naglasiti da je u pitanju simetrični I profil koji se promatra kao tankostijeni profil zbog manjih širini stjenki. Radi toga, promatramo profil kao središnju liniju stjenki  $t$  i  $t_0$ .

Ulazni parametri prikazani su u Tablici 3.2.

Tablica 3.2 – ulazni parametri za proračun naprezanja

Ulazni parametri		
opterećenje $q$	kN/m	50
modul el. $E$	GPa	210
Poissonov koef. $\nu$		0,3
Modul smicanja $G$	GPa	80,77

Moment na mjestu uklještenja  $M_A$  glasi:

$$M_A = -\frac{ql^2}{12},$$

dok je moment tromosti  $I_y$  prema izrazu:

$$I_y = A_1 \cdot h^2 \cdot \frac{12 + \Psi \cdot (8 + \Psi)}{12 \cdot (2 + \Psi)} \quad (3.3)$$

gdje je  $\psi$  :

$$\Psi = \frac{A_0}{A_1} = 0,64$$

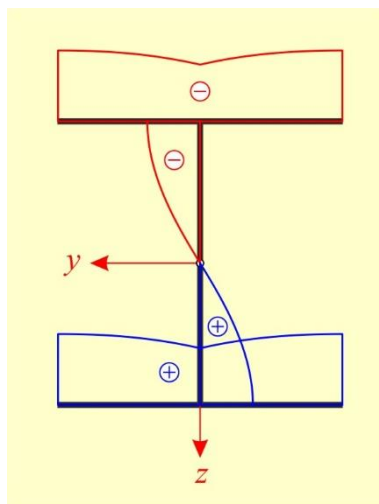
U (3.2) koeficijent smicanja  $k_{zz}$  računa se prema:

$$k_{zz} = \frac{6 \cdot (2 + \Psi)^3 \cdot (30 + 10 \cdot \Psi + \Psi^2 + 5 \cdot \Psi \cdot \rho^2)}{5 \cdot \Psi [12 + \Psi \cdot (8 + \Psi)]^2}$$

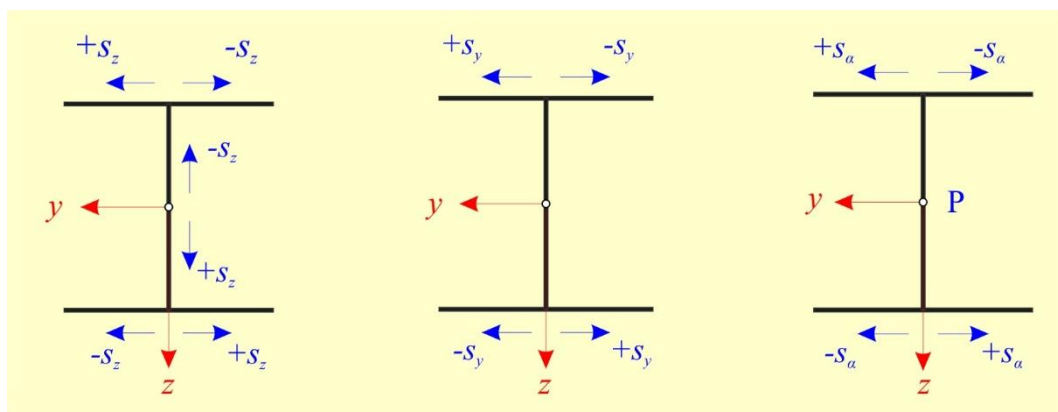
Kako bi se izračunala naprezanja različitih segmenata štapa, potrebno je koristiti izraz (3.2) s napomenom da za svaki dio poprečnog presjeka (gornji pojas, donji pojas te struk) integral u (3.2) računa prema Tablici 3.4.

Tablica 3.3– Izrazi za vrijednosti integrala naprezanja

Gornji pojas	$\int_0^{s_z} \frac{S_y}{t} ds = -\frac{h}{4} \cdot s_z \cdot (b - s_z) - \frac{h^2 \cdot (6 \cdot A_1 + A_0)}{24 \cdot t_0}$
Struk	$\int_0^{s_z} \frac{S_y}{t} ds = \frac{s_z}{t_0} \cdot \frac{h \cdot A_1}{2} + \frac{t_0}{24} \cdot (3 \cdot h^2 - 4 \cdot s_z^2)$
Donji pojas	$\int_0^{s_z} \frac{S_y}{t} ds = \frac{h}{4} \cdot s_z \cdot (b - s_z) + \frac{h^2 \cdot (6 \cdot A_1 + A_0)}{24 \cdot t_0}$



Slika 3.2 – Raspodjela naprezanja po poprečnom presjeku



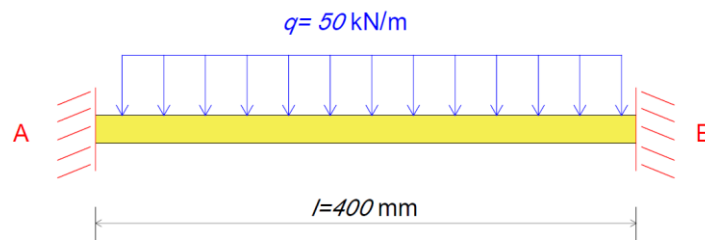
Slika 3.3 – Definiranje predznaka koordinata  $s_z$ ,  $s_y$  i  $s_\alpha$

Isto tako, za svaki od segmenata I profila potrebno je odrediti točke ( $s_z$ ) presjeka u kojima će se računati naprezanja. Kako bi analiza bila što točnija, odabrano je po 10 točaka svakog segmenta presjeka profila u kojem će biti izračunata naprezanja što će biti vidljivo iz tablica u nastavku. Osim toga, što se tiče duljine štapa, naprezanja će biti izračunata na mjestu uklještenja štapa te na sredini štapa.

Konačno, svi ti izračuni naprezanja će se računati za tri slučaja  $l/b$  kako bi uvidjeli utjecaj smicanja na relativno kratke štapove u usporedbi s općenito nešto dužim štapovima. Za te potrebe, računati će se omjeri  $l/b = 4$ ,  $l/b = 8$  te  $l/b = 12$ .

### 3.3. Prva varijanta - omjer $l/b = 4$

Kao što je prethodno rečeno, kako bi se promotrio utjecaj smicanja te uočilo mijenja li se isti prilikom promjene dužine grede, naprezanja će se promatrati kroz tri varijante. Prva varijanta je kada je dužina grede  $l = 400$  mm. Širina grede je  $b = 100$  mm, no ista je jednaka u sve 3 varijante, promjenjiva je samo duljina  $l$ .



Slika 3.4 – Prva varijanta  $l/b=4$

Naprezanja će prvo biti izračunata na mjestu uklještenja, a zatim i na sredini štapa.

Svi izračuni će također biti navedeni u tablicama priloga 2. ovom radu.

Na temelju prethodno navedenih formula te ulaznih podataka, može se izračunati naprezanje u točki B poprečnog presjeka prema izrazu (3.1).

$$\sigma_B = \frac{-666666,7}{177066,7} \cdot (-40)$$
$$\sigma_B = 15,06 \text{ MPa}$$

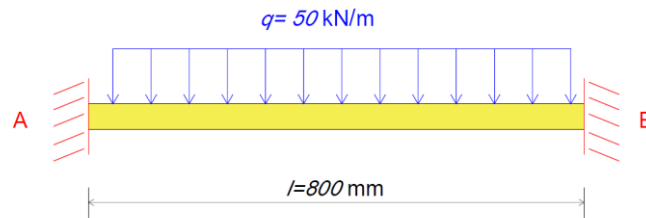
Nakon izračuna naprezanja prema formuli nauke o čvrstoći, u nastavku će biti izračunato isto naprezanje samo uz utjecaj smicanja prema izrazu (3.2).

Kako bi rezultati bili precizniji, po presjeku svakog od segmenata štapa (gornji, donji te struk) odabrano je 10 točaka ( $s_z$ ) u kojima će se izračunati naprezanje što je vidljivo iz Tablice (3.4).

### 3.4. Druga varijanta - omjer $l/b = 8$

U drugoj varijanti povećati će se duljina štapa  $l$  s tim da će ostale dimenzije poprečnog presjeka I profila ostati ne promijenjene. Duljina štapa koja će u ovoj varijanti promatrati je 800 mm, odnosno koeficijent  $l/b$  je 8. Sva naprezanja po presjeku su izračunata za sve tri varijante i to za točke struka donjeg pojasa.

Kao i u prvoj varijanti, promatra se utjecaj naprezanja preko dvije formule, jedna prema nauci o čvrstoći odnosno izraz (3.1), dok je druga s utjecajem smicanja prema izrazu (3.2).

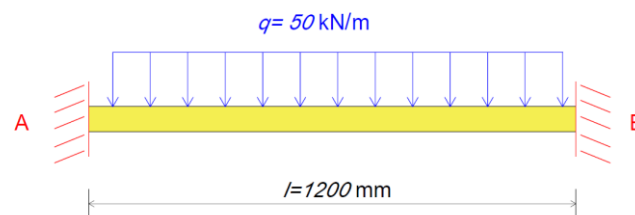


Slika 3.5 – Druga varijanta  $l/b=8$

### 3.5. Treća varijanta – omjer $l/b = 12$

U trećoj varijanti naprezanja su računata kao i u prethodne dvije varijante, međutim kod treće varijante omjer  $l/b = 12$  odnosno duljina štapa  $l$  je 1200 mm, dok širina  $b$  ostaje ista odnosno vrijednosti 100 mm.

Također, i za varijantu broj tri, naprezanja su izračunata prema dvije formule, preko izraza (3.1) i izraza (3.2).

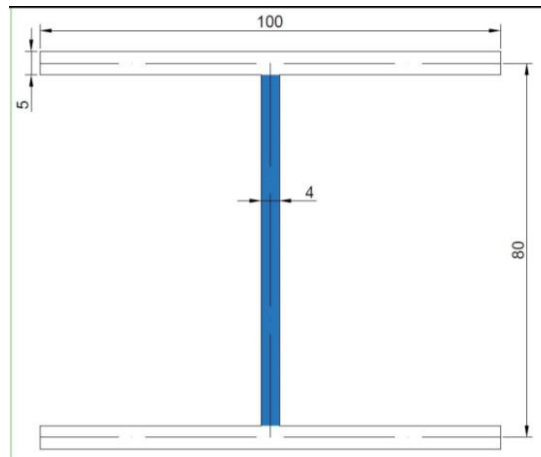


Slika 3.6 – Treća varijanta  $l/b=12$

### 3.6. Usporedba naprezanja struka I profila na mjestu uklještenja prema tri različite varijante

U nastavku su predstavljene tablice koje su također priložene u Prilogu 2 ovom radu gdje se nalazi i detaljniji proračun. Tablice predstavljaju usporedbu naprezanja po presjeku profila u karakterističnim točkama  $s_z$  prema dva različita izraza kao što je već prethodno rečeno. U tablicama  $\sigma_1$  predstavlja izračun prema (3.1) odnosno prema nauci o čvrstoći, dok  $\sigma_2$  predstavlja izračun prema (3.2) odnosno prema izrazu s utjecajem smicanja. Osim toga, ispod tablica se nalaze i grafovi kako bi se izračunate vrijednosti mogle slikovno pratiti po presjeku profila.





Slika 3.7 – Zadani I profil s označenim strukom profila

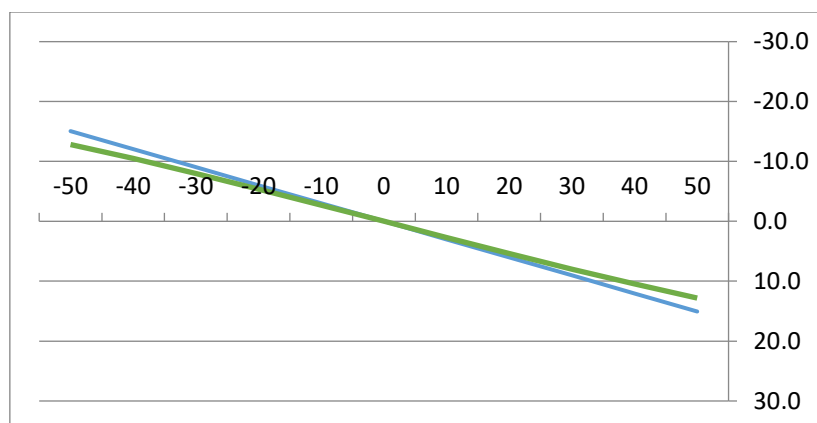
### Izračun naprezanja na mjestu uklještenja za struk prema varijanti $l/b=4$

Naprezanja struka su prema izrazu (3.2) dok integral za struk glasi:

$$\int_0^{s_z} \frac{S_y}{t} ds = \frac{s_z}{t_0} \cdot \frac{h \cdot A_1}{2} + \frac{t_0}{24} \cdot (3 \cdot h^2 - 4 \cdot s_z^2) \quad (3.4)$$

Tablica 3.4 – Naprezanja struka na mjestu uklještenja

Naprezanja struka za $l/b = 4$ – na mjestu uklještenja			
koordinata $z$	$s_z$	$\sigma_1$	$\sigma_2$
-40	-40	15,06	12,82
-32	-32	12,05	10,48
-24	-24	9,04	7,99
-16	-16	6,02	5,39
-8	-8	3,01	2,71
0	0	0,00	0,00
8	8	-3,01	-2,71
16	16	-6,02	-5,39
24	24	-9,04	-7,99
32	32	-12,05	-10,48
40	40	-15,06	-12,82



Slika 3.8 – Dijagram naprezanja struka na mjestu uklještenja

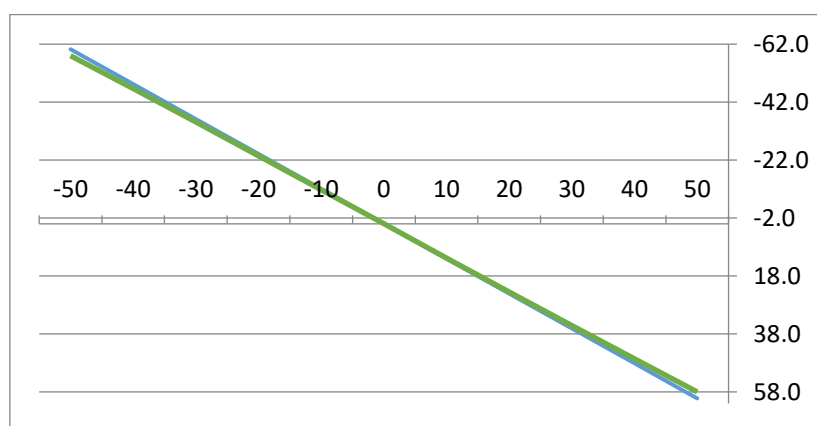
Tijekom analize je uočeno da se na struku I profila, smicanje najviše očituje na krajevima struka jer je tu najveća razlika između izraza (3.1) te izraza koji uključuje samo smicanje, a to je izraz (3.2). S obzirom na niske vrijednosti naprezanja, najveća razlika se očituje u čak ~ 15%. U dijagramu naprezanja (slika 3.8) vidljiva je razlika u naprezanjima te da se same linije ne preklapaju već imaju određeni razmak.

### Izračun naprezanja struka na mjestu uklještenja za varijantu $l/b=8$

Naprezanja su izračunata prema istim izrazima kao i prethodna varijanta odnosno prema izrazima (3.1) te (3.2).

Tablica 3.5 – Naprezanja struka na mjestu uklještenja za varijantu  $l/b=8$

Naprezanja struka za $l/b=8$ – na mjestu uklještenja			
koordinata $z$	$s_z$	$\sigma_1$	$\sigma_2$
-40	-40	60,24	58,00
-32	-32	48,19	46,63
-24	-24	36,15	35,10
-16	-16	24,09	23,46
-8	-8	12,05	11,75
0	0	0,000	0,00
8	8	-12,05	-11,75
16	16	-24,09	-23,46
24	24	-36,15	-35,10
32	32	-48,19	-46,63
40	40	-60,24	-58,00



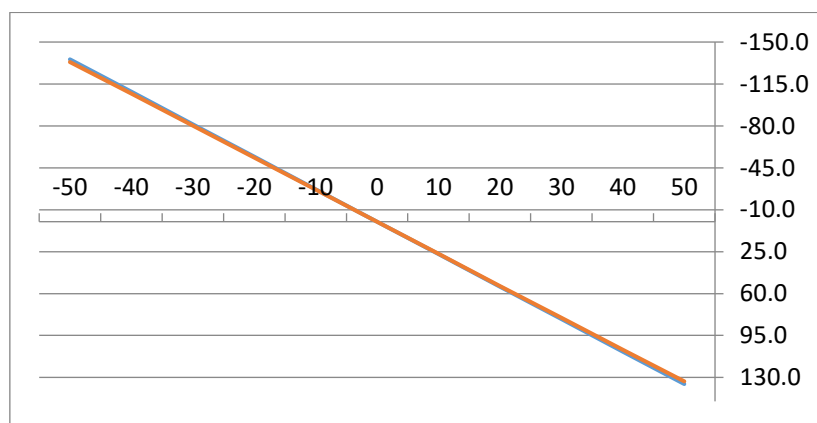
Slika 3.9 – Dijagram naprezanja struka na mjestu uklještenja za varijantu  $l/b=8$

Može se zaključiti da su u odnosu na prvu varijantu, linije više preklapljene te da su manje razlike među njima. To dovodi do zaključka da prilikom promjene duljine štapa, povećavaju se i naprezanja međutim kako su naprezanja veća to se omjer  $\sigma_2/\sigma_1$  više smanjuje.

### Izračun naprezanja struka na mjestu uklještenja za varijantu $l/b=12$

Tablica 3.6 – Naprezanja struka na mjestu uklještenja za varijantu  $l/b=12$

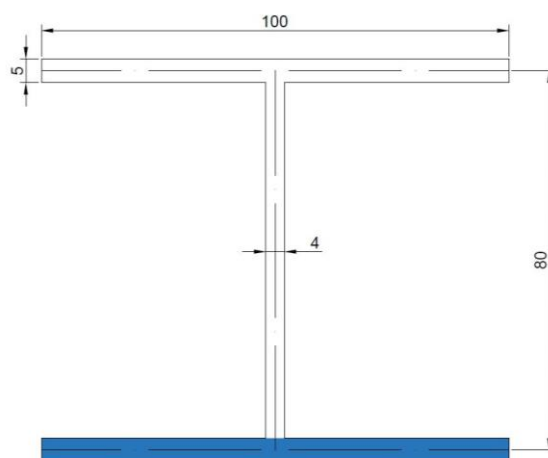
Naprezanja struka za $l/b=12$ – na mjestu uklještenja			
koordinata z	$s_z$	$\sigma_1$	$\sigma_2$ ukupno
-40	-40	135,5	133,3
-32	-32	108,4	106,9
-24	-24	81,3	80,3
-16	-16	54,2	53,6
-8	-8	27,1	26,81
0	0	0,000	0,00
8	8	-27,1	-26,8
16	16	-54,2	-53,6
24	24	-81,3	-80,3
32	32	-108,4	-106,9
40	40	-135,5	-133,3



Slika 3.10 – Dijagram naprezanja struka na mjestu uklještenja za varijantu  $l/b=12$

Za treću varijantu se primjećuje da se linije naprezanja gotovo pa preklapaju. Dakle, zaključak je da što se još više povećava duljina  $l$  to je manje primjetan utjecaj smicanja.

### 3.7. Usporedba naprezanja donjeg pojasa I profila na mjestu uklještenja prema tri varijante



Slika 3.11 – Zadani I profil s označenim donjim pojasom profila

#### Izračun naprezanja na mjestu uklještenja za donji pojas za varijantu $l/b=4$

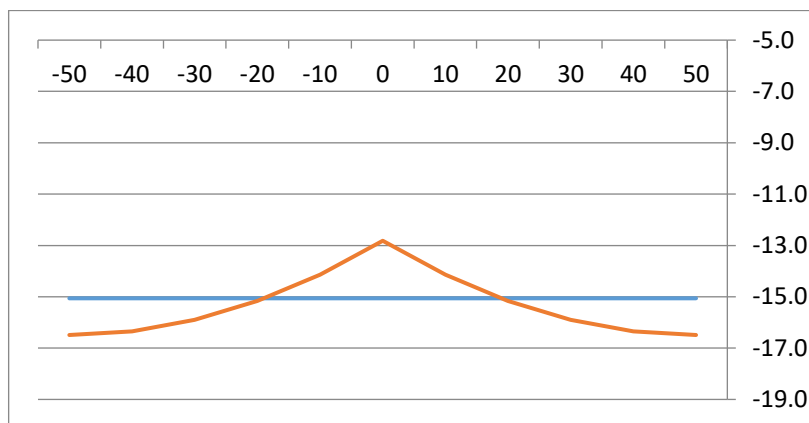
Naprezanja štapa su prema izrazu (3.2) dok integral za donji pojas glasi:

$$\int_0^{s_z} \frac{S_y}{t} ds = -\frac{h}{4} \cdot s_z \cdot (b + s_z) + \frac{h^2 \cdot (6 \cdot A_1 + A_2)}{24 \cdot t_0} \quad (3.5)$$

Tablica 3.7 – Naprezanja donjeg pojasa na mjestu uklještenja

Naprezanja donjeg pojasa za $l/b=4$ – na mjestu uklještenja			
koordinata z	$s_z$	$\sigma_1$	$\sigma_2$
40	50	-15,06	-16,49
40	40	-15,06	-16,34
40	30	-15,06	-15,90
40	20	-15,06	-15,17
40	10	-15,06	-14,14
40	0	-15,06	-12,82
40	-10	-15,06	-14,14
40	-20	-15,06	-15,17

40	-30	-15,06	-15,90
40	-40	-15,06	-16,34
40	-50	-15,06	-16,49



Slika 3.12 – Dijagram naprezanja donjeg pojasa na mjestu uklještenja

Naprezanja za donji pojas su u pravilu istih vrijednosti kao i za gornji pojas samo što je razlika u predznaku, odnosno naprezanja su istih vrijednosti, no donji pojas je tlačno opterećen dok je gornji pojas vlačno opterećen. Također, na dijagramu naprezanja (slika 3.12) jasno se vidi raspored naprezanja po presjeku I profila. Kao i kod gornjeg pojasa, jasno se vidi da je utjecaj smicanja najveći na sredini donjeg pojasa jer se tu nalazi vrh linije odnosno u toj točki očituje se najveća razlika između dvije navedene formule.

Za preostale dvije varijante, tablice i grafovi su priloženi u Prilogu 2 ovog rada.

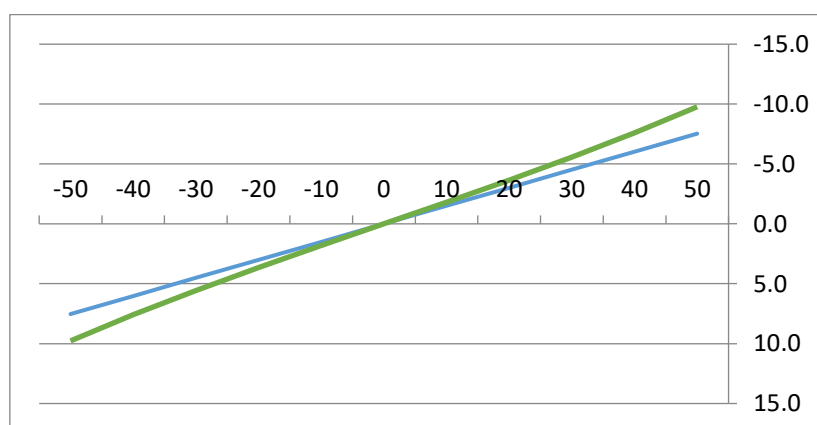
### 3.8. Usporedba naprezanja struka I profila na sredini štapa prema tri varijante

Postupak je isti kao i kod prethodne analize na mjestu uklještenja. Izračunata su naprezanja prema dva različita izraza, jednog uz utjecaj smicanja te drugog bez utjecaja smicanja. Rezultati su predstavljeni na isti način, odnosno prikazane su tablice za usporedbu dva izraza te isto tako dijagrami koji slikovito prikazuju razliku u izračunu kod dva izraza.

## Izračun naprezanja na sredini štapa za struk za varijantu $l/b=4$

Tablica 3.8 – Naprezanja struka na sredini štapa

Naprezanja struka za $l/b=4$ – na sredini štapa			
koordinata $z$	$s_z$	$\sigma_1$	$\sigma_2$
-40	-40	-7,530	-9,77
-32	-32	-6,024	-7,59
-24	-24	-4,518	-5,56
-16	-16	-3,012	-3,65
-8	-8	-1,506	-1,80
0	0	0,000	0,00
8	8	1,506	1,80
16	16	3,012	3,65
24	24	4,518	5,56
32	32	6,024	7,59
40	40	7,530	9,77



Slika 3.13 – Dijagram naprezanja struka na sredini štapa

Na sredini štapa može se uočiti isti trend kao i kod mjesta uklještenja. Kod prve varijante, linije na dijagramima naprezanja su se preklapale po sredini dok su se značajnije razdvajale tek na krajevima gdje su i najveća naprezanja struka poprečnog presjeka profila.

Međutim, već u drugoj varijanti se primjećuje da se linije počinju preklapati odnosno da je utjecaj smicanja sve manji. Dok konačno u trećoj varijanti gdje je najveća duljina  $l$  primjećuje se gotovo pa potpuno preklapanje linija u dijagramu (slika 3.17) što znači da s obzirom da taj trend, da se još više produljuje duljina štapa to bi razlike između dviju linija bile sve manje uočljive.

Tablice i grafove za ostale varijante su priložene u Prilogu 2 ovom radu.

### 3.9. Usporedba naprezanja donjeg pojasa I profila na sredini štapa prema tri varijante

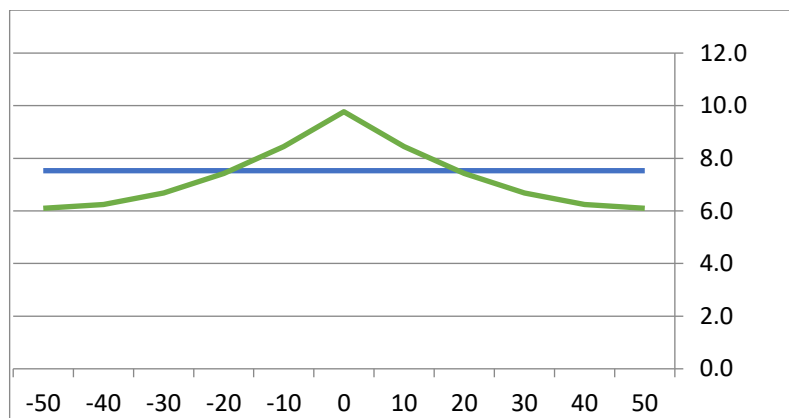
Isto kao i kod analize utjecaja naprezanja na mjestu uklještenja, promatra se utjecaj naprezanja na sredini štapa te je cilj uočiti vrijedi li isto pravilo kod mjesta uklještenja te na sredini štapa.

#### Izračun naprezanja na sredini štapa za donji pojas za varijantu $l/b=4$

Tablica 3.9 – Naprezanja donjeg pojasa na sredini štapa

Naprezanja donjeg pojasa za $l/b=4$ – na sredini štapa			
$z$ koordinata	$s_z$	$\sigma_1$	$\sigma_2$
40	50	7,530	6,10
40	40	7,530	6,25
40	30	7,530	6,69
40	20	7,530	7,42
40	10	7,530	8,45
40	0	7,530	9,77
40	-10	7,530	8,45
40	-20	7,530	7,42
40	-30	7,530	6,69
40	-40	7,530	6,25
40	-50	7,530	6,10





Slika 3.14 – Dijagram naprezanja donjeg pojasa na sredini štapa za varijantu  $l/b=4$

Zaključak analize donjeg pojasa na sredini štapa je praktično isti kao i kod analize na mjestu uklještenja. Dakle, kod manjih vrijednosti naprezanja koje se očituju u prvoj varijanti, smicanje može biti značajno u postotku jer su vrijednosti poprilično male pa se i razlika između dva izraza može protumačiti kao značajna. Međutim razmatrajući veće duljine štapa, ta razlika postaje gotovo pa bez značajna.

Tablice i grafovi za preostale varijante su priloženi u Prilogu 2 ovog rada.

### 3.10. Analiza utjecaja smicanja na iznose normalnih naprezanja za različite omjere $l/b$

Prema prethodno napravljenoj analizi, može se zaključiti kako se vrijednost izraza naprezanja prema (3.2) koji uključuje u formulu naprezanja prema nauci o čvrstoći (izraz 3.1) i smicanje, više očituje kod štapova sa manjom duljinom  $l$  odnosno u ovom slučaju, prva varijanta  $l/b=4$  kada je duljina štapa samo 400 milimetara, utjecaj smicanja je znatan. U prvoj varijanti, kod omjer  $\sigma_2/\sigma_1$ , omjeri vrijednosti mogu se činiti značajnijih vrijednosti što se vidi iz tablice 3.17. Međutim, povećavajući omjer  $l/b$  mijenjanjem odnosno povećanjem duljine  $l$  ta razlika se sve manje očituje što je vidljivo iz prethodno navedenih dijagrama naprezanja te tablice usporednih vrijednosti  $\sigma_2/\sigma_1$  (tablica 3.17. i tablica 3.18).

Primjerice, kod naprezanja struka vidljivo je i kod naprezanja na mjestu uklještenja te kod naprezanja na sredini štapa, da se u prvoj varijanti trendovi linije naprezanja preklapaju po sredini presjeka gdje na samoj sredini poprimaju vrijednost 0, međutim vidljive su razlike na krajevima štapa odnosno na samim mjestima uklještenja gdje naprezanja kod struka poprimaju najveću vrijednost. Dok već kod druge varijante te posebno kod treće varijante se

Iako uočava da se trendovi linije gotovo pa preklapaju te da je utjecaj smicanja gotovo isti kao i kod izraza (3.1) koji smicanje ne uključuje u proračun.

Ista analogija se primjećuje i kod naprezanja donjeg pojasa. Dakle, gdje su manje vrijednosti naprezanja odnosno manje duljine štapa, tu su u postotku odnosno omjeru  $\sigma_2/\sigma_1$  i veće razlike između navedena dva izraza. Međutim, kada se vrijednosti povećaju, shodno tome ne raste razlika između dvaju naprezanja već ostaje otprilike identična, tako u postotku je razlika dvaju izraza gotovo nepostojeća.

Što se više povećava omjer  $l/b$  to su razlike sve manje i manje te gotovo pa iščeznu.

Tablica 3.10 – Analiza usporedbe naprezanja prema omjeru  $\sigma_1/\sigma_2$  za naprezanja struka

NAPREZANJA STRUKA					
Varijanta $l/b=4$			Varijanta $l/b=12$		
$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\sigma_1/\sigma_2$	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\sigma_1/\sigma_2$
15,06	12,82	1,17	135,5	133,3	1,017
12,05	10,48	1,15	108,4	106,9	1,014
9,04	7,99	1,13	81,33	80,28	1,013
6,02	5,39	1,12	54,22	53,58	1,012
3,01	2,71	1,11	27,11	26,81	1,011
0,00	0,00	/	0,000	0,00	/
-3,01	-2,71	1,11	-27,11	-26,81	1,011
-6,02	-5,39	1,12	-54,22	-53,58	1,012
-9,04	-7,99	1,13	-81,33	-80,28	1,013
-12,05	-10,48	1,15	-108,4	-106,9	1,015
-15,06	-12,82	1,17	-135,5	-133,3	1,017

Tablica 3.11– Analiza usporedbe naprezanja prema omjeru  $\sigma_1/\sigma_2$  za naprezanja donjeg pojasa

NAPREZANJA DONJEG POJASA					
Varijanta $l/b=4$			Varijanta $l/b=12$		
$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\sigma_2/\sigma_1$	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\sigma_2/\sigma_1$
-15,06	-16,49	1,0949	-135,5	-136,97	1,011
-15,06	-16,34	1,0851	-135,5	-136,82	1,009
-15,06	-15,90	1,0559	-135,5	-136,38	1,006
-15,06	-15,17	1,0072	-135,5	-135,65	1,001
-15,06	-14,14	0,9389	-135,5	-134,62	0,993
-15,06	-12,82	0,8512	-135,5	-133,30	0,9834
-15,06	-14,14	0,9389	-135,5	-134,62	0,9932
-15,06	-15,17	1,0072	-135,5	-135,65	1,0008
-15,06	-15,90	1,0559	-135,5	-136,38	1,006
-15,06	-16,34	1,0851	-135,5	-136,82	1,0095
-15,06	-16,49	1,0949	-135,5	-136,97	1,0105

Prema tablicama 3.16 i 3.17 se može i praktično vidjeti kako se omjer  $\sigma_2/\sigma_1$  smanjuje odnosno kako se povećava duljina štapa  $l$  tako razlike u vrijednostima izraza 3.1 te 3.2 postaju sve manje primjetne. Pa tako, primjerice omjer  $\sigma_2/\sigma_1$  kod naprezanja donjeg pojasa na krajevima donjeg pojasa za varijantu  $l/b=4$  je vrijednosti 1,095 dok je za isto naprezanja samo kod varijante  $l/b=12$  vrijednost 1,0105.

## 4. Progibi štapa

U početnom dijelu ovog rada, preko diferencijalne jednačbe za progib dobiven je izraz (2.2) za maksimalan progib štapa koji se nalazi na sredini samog štapa. Kako bi se dobili progibi na štapu u više točaka kako bi se dobio uvid u ponašanje progiba pod odgovarajućom silom preko cijelog štapa, potrebno je prema izrazu (2.1) uvrstiti više koordinata  $x/l$ .

Progibi će se računati prema dva različita izraza. Prvi izraz je prema nauci o čvrstoći, dok je drugi izraz s utjecajem smicanja. Cilj je promotriti kakav utjecaj ima smicanje kod različitih duljina ( $l$ ) štapa. Pa tako, progibi će biti izračunati prema tri varijante. Prva varijanta je za koeficijent  $l/b = 4$ , druga varijanta gdje je  $l/b = 8$  te treća varijanta gdje je  $l/b = 12$  kao što je u prethodnom dijelu rada izračunato za naprezanja.

### 4.1. Izrazi za progibe

Prvi izraz prema kojem su izračunati progibi je izraz (2.1), koji je izraz progibne funkcije ovog štapa prema nauci o čvrstoći te će u tablici ovaj izraz biti označen sa  $w_B$ . Izraz (2.1) glasi:

$$w(x) = \frac{q \cdot l^4}{24 \cdot E \cdot I_y} \cdot \left[ \left( \frac{x}{l} \right)^2 - 2 \cdot \left( \frac{x}{l} \right)^3 + \left( \frac{x}{l} \right)^4 \right]$$

Drugi izraz prema kojem su izračunati progibi je izraz u koji je uključen utjecaj smicanja, kako bi se promotrla razlika utjecaja smicanja za štapove različitih duljina. Izraz glasi:

$$w_S = \frac{M_y - M_{Ay}}{G \cdot A} \cdot K_{zz} \quad (4.1)$$

Isto tako, kako bi se izradio dijagram u kojem su zbrojena dva prethodno navedena izraza, te sljedeći izraz (4.2) daje ukupni progib štapa.

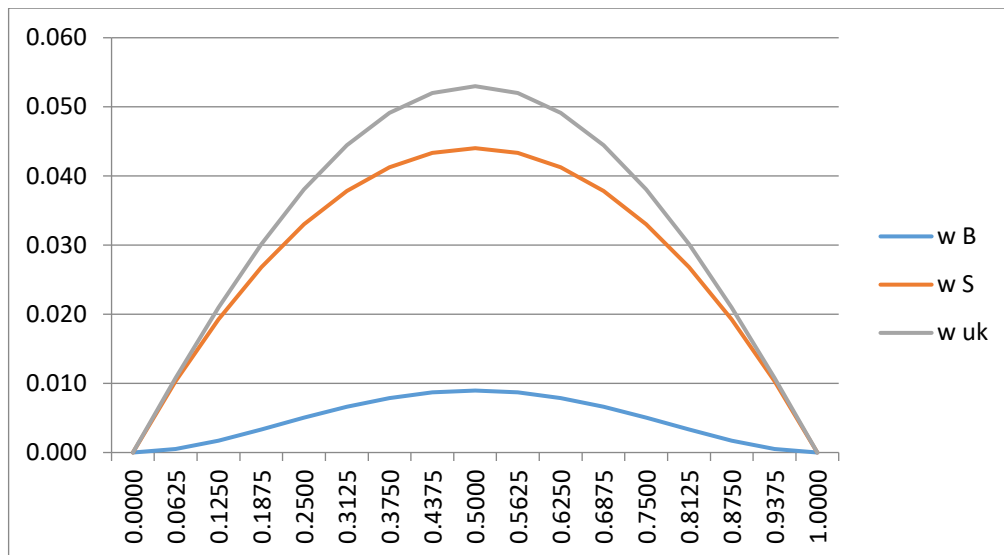
$$w_{uk} = w_B + \frac{M_y - M_{Ay}}{G \cdot A} \cdot K_{zz} \quad (4.2)$$

## 4.2. Progibi za prvu varijantu $l/b=4$

U prvoj varijanti promatra se utjecaj progiba prema dva različita izraza; prema izrazima (2.1) te prema izrazu (4.2). Progib se promatra u 16 točaka na štapu odnosno koordinata  $x/l$ . Isto tako, izrađen je dijagram gdje se jasno vidi koliki je utjecaj progiba prema izrazu (2.1) te koliki je isti prema izrazu (4.1). Osim toga, u dijagramu je ucrtan i ukupni progib koji je zapravo zbroj od prethodno spomenuta dva izraza. Tablica 4.1 prikazuje izračun prema već prethodno navedena dva izraza te njihov zbroj.

Tablica 4.1 – Progibi štapa na 16 različitih točaka varijantu  $l/b=4$  prema dva izraza

$x/l$	$M_y$ Nmm	$w_T$	$w_S$	$w_{uk}$
0,0000	-666666,67	0,00000	0,00000	0,00000
0,0625	-432291,67	0,00049	0,01032	0,01081
0,1250	-229166,67	0,00172	0,01926	0,02098
0,1875	-57291,67	0,00333	0,02683	0,03016
0,2500	83333,33	0,00504	0,03302	0,03806
0,3125	192708,33	0,00662	0,03784	0,04446
0,3750	270833,33	0,00788	0,04128	0,04915
0,4375	317708,33	0,00869	0,04334	0,05203
0,5000	333333,33	0,00896	0,04403	0,05299
0,5625	317708,33	0,00869	0,04334	0,05203
0,6250	270833,33	0,00788	0,04128	0,04915
0,6875	192708,33	0,00662	0,03784	0,04446
0,7500	83333,33	0,00504	0,03302	0,03806
0,8125	-57291,67	0,00333	0,02683	0,03016
0,8750	-229166,67	0,00172	0,01926	0,02098
0,9375	-432291,67	0,00049	0,01032	0,01081
1,0000	-666666,67	0,00000	0,00000	0,00000



Slika 4.1 – Dijagram progiba štapa za varijantu  $l/b=4$  prema dva izraza

Prema dijagramu (slika 4.1) može se primijetiti da je analiza pokazala da je utjecaj izraza (4.1) odnosno utjecaja koji uključuje smicanje za varijantu  $l/b=4$  tj. kada je duljina štapa  $l=400$  mm, utjecaj smicanja popriličan u odnosu na izraz (2.1) prema nauci o čvrstoći koji isto ne uključuje. Osim toga, može se primijetiti kako progibna funkcija raste od početka prema sredini gdje dobiva najveću vrijednost, te od sredine prema kraju ponovno pada. Tj. uočljivo je da je najveći progib na sredini štapa, dok je vrijednost istog na krajevima koji su uklješteni 0.

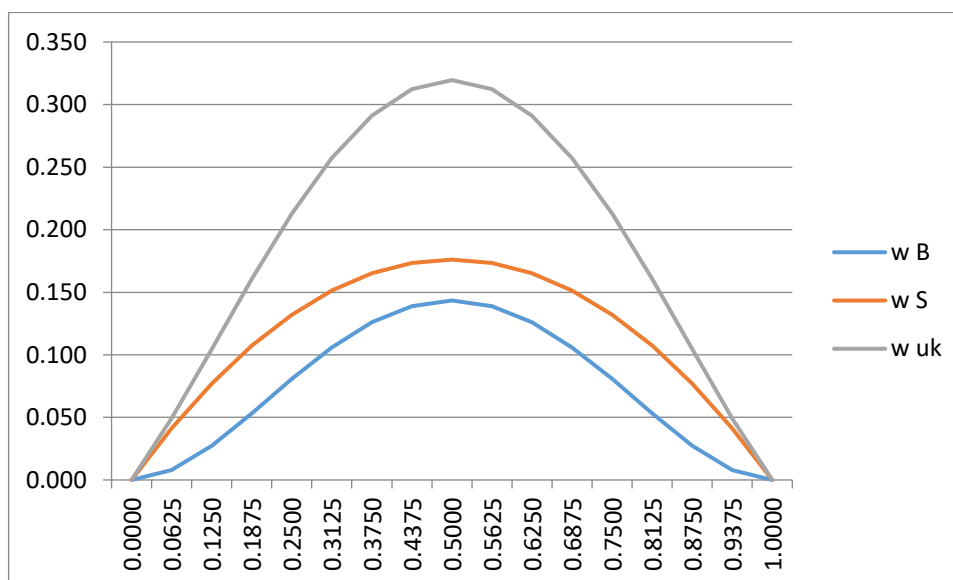
### 4.3. Progibi za drugu varijantu $l/b=8$

Druga varijanta je kada se duljina štapa  $l$  uzima 800 milimetara. Isto kao u prethodno varijanti, progibi su izračunati putem dva izraza odnosno sa i bez utjecaja smicanja. Isto tako, izrađena je tablica te dijagram koji prikazuju progibe za 16 različitih točaka na štapu.

Tablica 4.2 – Progibi štapa na 16 različitih točaka varijantu  $l/b=8$  prema dva izraza

$x/l$	$M_y$ Nmm	$w_B$	$w_S$	$w_{uk}$
0,0000	-2666666,7	0,00000	0,00000	0,00000
0,0625	-1729166,7	0,00788	0,04128	0,04915
0,1250	-916666,7	0,02745	0,07705	0,10450
0,1875	-229166,7	0,05326	0,10732	0,16058
0,2500	333333,3	0,08068	0,13208	0,21276
0,3125	770833,3	0,10593	0,15134	0,25727

0,3750	1083333,3	0,12606	0,16510	0,29117
0,4375	1270833,3	0,13898	0,17336	0,31234
0,5000	1333333,3	0,14343	0,17611	0,31954
0,5625	1270833,3	0,13898	0,17336	0,31234
0,6250	1083333,3	0,12606	0,16510	0,29117
0,6875	770833,3	0,10593	0,15134	0,25727
0,7500	333333,3	0,08068	0,13208	0,21276
0,8125	-229166,7	0,05326	0,10732	0,16058
0,8750	-916666,7	0,02745	0,07705	0,10450
0,9375	-1729166,7	0,00788	0,04128	0,04915
1,0000	-2666666,7	0,00000	0,00000	0,00000



Slika 4.2 – Dijagram progiba štapa za varijantu  $l/b=8$  prema dva izraza

Prema Tablici 4.1 može se uočiti također da je progib na krajevima 0, dok je na sredini najveća vrijednost progiba uz nešto veće vrijednosti progiba nego u prvoj varijanti. Prema dijagramu (slika 2.4) uočava se da je progib prema prvom izrazu ima veću vrijednost nego kod prve varijante, te se u dijagramu može primijetiti kako se linija progiba za izraz  $w_B$  približila liniji koja označava progib uz utjecaj smicanja  $w_S$ . S tim se može zaključiti da povećanjem duljine štapa, smanjuje se utjecaj smicanja.

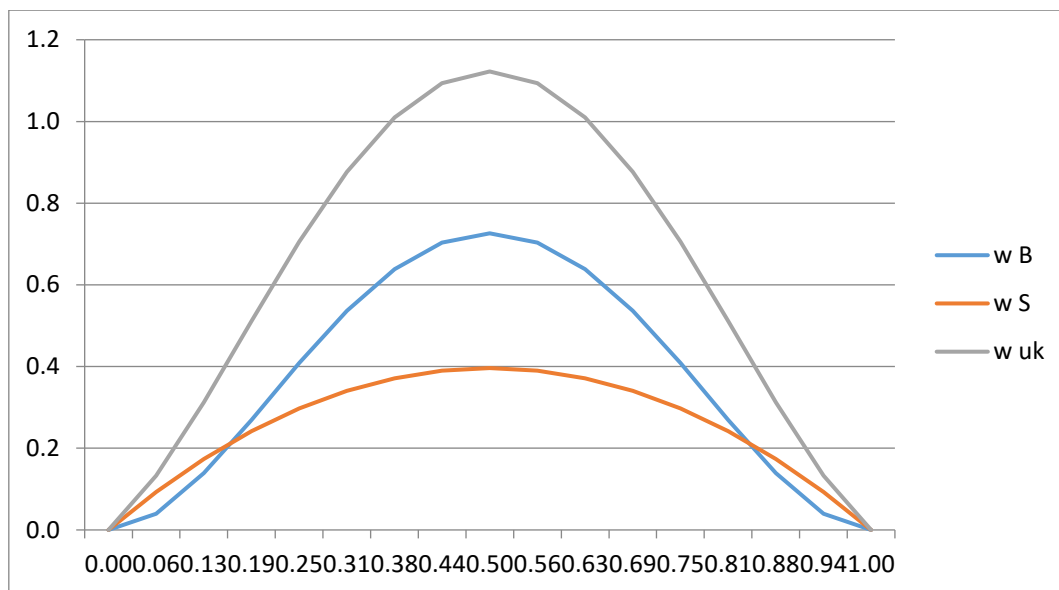
#### 4.4. Progibi za treću varijantu $l/b = 12$

U trećoj varijanti se uzima duljina  $l = 1200$  milimetara. Isto kao u prethodne dvije varijante, progibi su izračunati u 16 točaka štap. Potrebno je analizirati utjecaj smicanja za štap navedene duljine u usporedbi s izrazom koji smicanje ne uključuje. U svrhu toga, izrađena je Tablica 4.3 koja sadrži usporedbe izračuna prema dva različita izraza te dijagram koji prikazuje vrijednosti progiba prema koordinatama  $x/l$ .

Tablica 4.3 – Progibi štapa na 16 različitih točaka varijantu  $l/b=12$  prema dva izraza

$x/l$	$M_y$ Nmm	$w_B$	$w_S$	$w_{uk}$
0,0000	-6000000,0	0,00000	0,00000	0,00000
0,0625	-3890625,0	0,03989	0,09287	0,13276
0,1250	-2062500,0	0,13898	0,17336	0,31234
0,1875	-515625,0	0,26964	0,24146	0,51110
0,2500	750000,0	0,40844	0,29718	0,70563
0,3125	1734375,0	0,53626	0,34052	0,87678
0,3750	2437500,0	0,63819	0,37148	1,00967
0,4375	2859375,0	0,70360	0,39005	1,09366
0,5000	3000000,0	0,72612	0,39624	1,12237
0,5625	2859375,0	0,70360	0,39006	1,09366
0,6250	2437500,0	0,63819	0,37148	1,00967
0,6875	1734375,0	0,53626	0,34052	0,87678
0,7500	750000,0	0,40844	0,29718	0,70563
0,8125	-515625,0	0,26964	0,24146	0,51110
0,8750	-2062500,0	0,13898	0,17335	0,31234
0,9375	-3890625,0	0,03989	0,09287	0,13276
1,0000	-6000000,0	0,00000	0,00000	0,00000



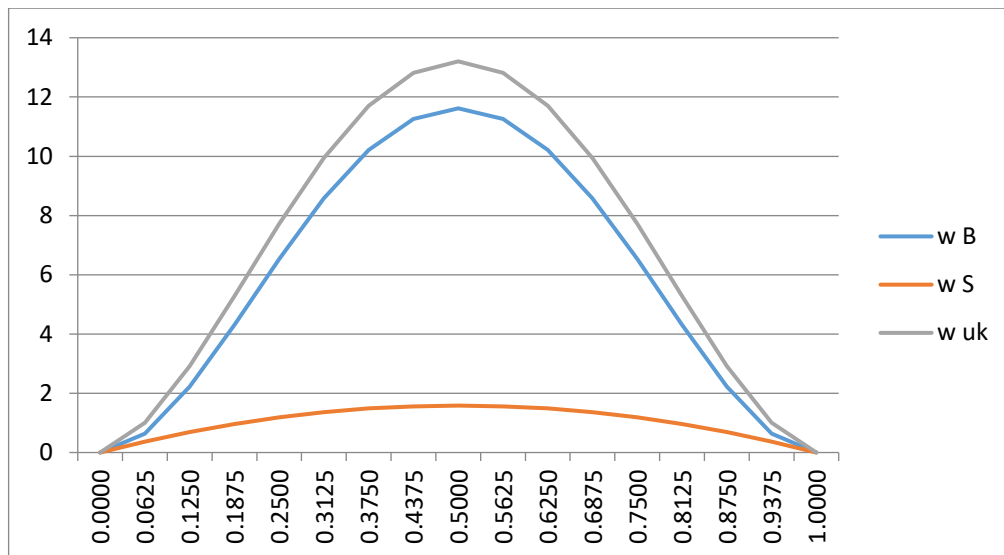


Slika 4.3 – Dijagram progiba štapa za varijantu  $l/b=12$  prema dva izraza

Prema dijagramu na slici 4.3 uočava se da veću vrijednost ima izraz za  $w_B$  od izraza za  $w_S$ . Odnosno smicanje još ima veći utjecaj u prvih nekoliko točaka od kraja štapa dok nakon toga, izraz bez utjecaja smicanja ima znatno veću vrijednost posebice na sredini samog štapa gdje je u pravilu i najveća vrijednost progiba prema oba izraza. Može se zaključiti da je utjecaj smicanja bio najveći kod prve varijante. Kod druge varijante smicanje je već gubilo utjecaj, no i dalje je imalo veći utjecaj na ukupni progib od izraza bez utjecaja smicanja. Dok kod treće varijante, izraz bez utjecaja smicanja ima znatno veći utjecaj na ukupni progib od izraza koji uključuje i smicanje.

#### 4.5. Analiza utjecaja smicanja na progibe za različite omjere $l/b$

Prema prethodno napravljenoj analizi, uočava se da smicanje kod progiba ima znatan utjecaj kod manjih štapova te bi se smicanje kod tih štapova trebalo uračunati. Međutim, kada se povećava duljina štapa, a širina  $b$  poprečnog presjeka štapa ostaje ista, utjecaj smicanja postaje sve manje što je vidljivo kod druge varijante (slika 4.2), dok u jednom trenutku, utjecaj smicanja ne postane i manje bitan za ukupni progib štapa od izraza koji utjecaj istog ne uključuje. Kada se i dalje povećava duljinu štapa  $l$  taj utjecaj smicanja je sve manji. Prema slici 4.4 se može uočiti u dijagramu koji prikazuje kako na štapu duljine  $l=2400$  mm, taj utjecaj smicanja gotovo i ne postoji, a ako bi se i dalje povećavala duljina taj utjecaj bi praktički postao potpuno neprimjetan.

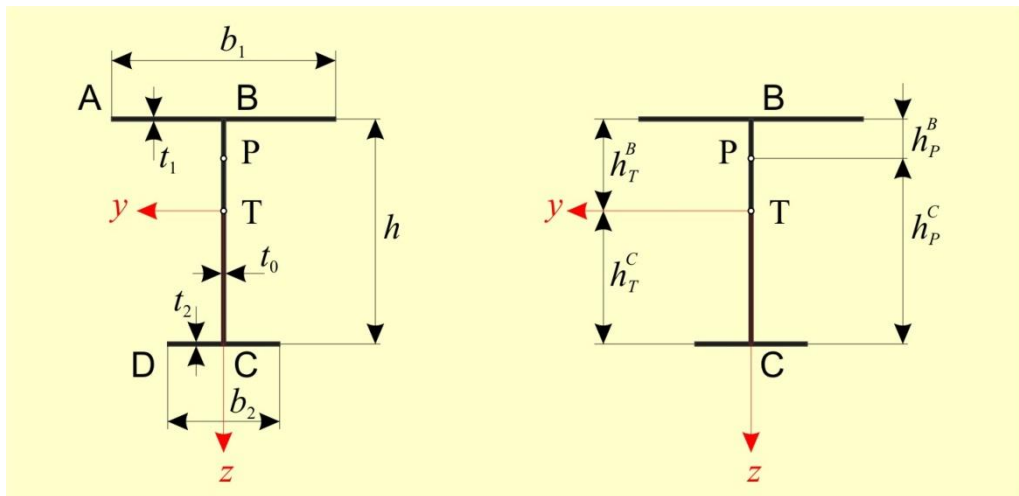


Slika 4.4 – Dijagram progiba štapa za duljinu štapa 2400 mm prema dva izraza

## 5. Zadani I profil s jednom osi simetrije

U nastavku su izračunata naprezanja te progibi I profila s jednom osi simetrije. Slika 5.1 prikazuje geometrijske karakteristike profila.

Za ovaj I profil izračunata su samo naprezanja za omjer  $l/b = 4$  u svrhu usporedbe s profilom koji ima dvije osi simetrije za koji su prethodno u ovom radu izračunata naprezanja i progibi (slika 3.1).



Slika 5.1 – I profil s jednom osi simetrije

### 5.1. Geometrijske karakteristike I profila s jednom osi simetrije

Izrazi za računanje dimenzija geometrijskih veličina I profila s jednom osi simetrije, preuzeti su iz literature te iznose:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= b_1 t_1 & A_2 &= b_2 t_2 & A_0 &= h t_0 \\
 \lambda &= \frac{A_2}{A_1} & \psi &= \frac{A_0}{A_1} & \mu &= \frac{h_T^C}{h_T^B} & \eta &= \frac{b_2}{b_1} & \varphi &= \frac{h_T^B}{h} \\
 \rho &= \frac{b_1}{h} & L_s &= h & & & & & & \text{proizvoljno odabrano}
 \end{aligned}$$

Položaj težišta određen je sljedećim izrazima:

$$h_T^B = h \frac{2\lambda + \psi}{2(1 + \lambda + \psi)},$$

$$h_T^C = h \frac{2 + \psi}{2(1 + \lambda + \psi)}.$$

Moment tromosti I profila iznosi

$$I_y = A_1 h^2 \frac{12\lambda + \psi(4 + \psi + 4\lambda)}{12(1 + \lambda + \psi)}.$$

U tablici 5.1 prikazane su dimenzije I profila s jednom osi simetrije.

Tablica 5.1 – Dimenzije I profila s jednom osi simetrije

širina pojasa $b_1$	mm	100
širina pojasa $b_2$	mm	50
debljina struka $t_1$	mm	5
debljina struka $t_0$	mm	4
visina struka $h$	mm	80
Površina pojasa $A_1$	mm <sup>2</sup>	500
Površina struka $A_0$	mm <sup>2</sup>	320
Površina struka $A_2$	mm <sup>2</sup>	250
Ukupna površina $A$	mm <sup>2</sup>	1070

Duljina nosača  $l$  koja će se promatrati u ovom slučaju kod I profila s jednom osi iznosi 400 mm.

Tablica 5.2 – Karakterike profila

<b>Karakteristike profila</b>		
Maks. moment $M_y$	Nmm	-666666,67
Moment tromost $I_y$	mm <sup>4</sup>	1277208,72
Moment u sredini štapa $M_y$	Nmm	333333,33
Moment u točki A štapa	Nmm	-666666,67

## 5.2. Izrazi za naprezanja štapa poprečnog presjeka s jednom osi simetrije

Izračunavanje naprezanja će se vršiti, kao i u prethodnom primjeru, preko dva različita izraza za naprezanja. Prvi izraz će biti izraz koji ne uključuje utjecaj smicanja, dok će drugi izraz sadržavati utjecaj smicanja.

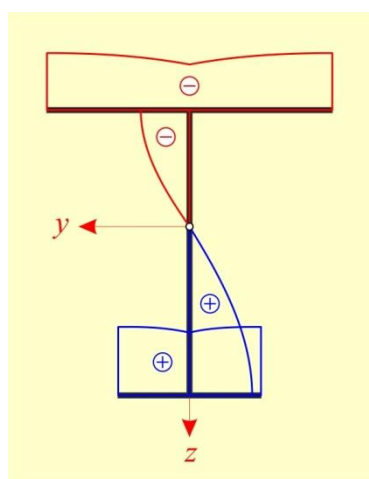
Prvi izraz je izraz (3.1) prema nauci o čvrstoći koji ne uključuje utjecaj smicanja.

Drugi izraz koji uključuje utjecaj smicanja iznosi:

$$\sigma_3 = \frac{M_y}{I_y} \cdot z + q_z \cdot k_{zz} \frac{E}{G \cdot A} \cdot z - q_z \frac{E}{G \cdot I_y} \cdot \int_0^{s_z} \frac{S_y}{t} ds + q_z \cdot \frac{E \cdot L_s \cdot k_{xz}}{G \cdot A}, \quad (5.1)$$

Dok se  $\int_0^{s_z} \frac{S_y}{t} ds$  mijenja u ovisnosti o tome radi li se o gornjem pojasu, donjem pojasu

ili struku štapa prema Tablici 5.3 dok je raspored naprezanja po poprečnom presjeku slikovno prikazan na slici 5.2.



Slika 5.2 – Raspored naprezanja po poprečnom presjeku I profila

Tablica 5.3 – Mijenjanje izraza za integral  $\int_0^{s_z} \frac{S_y}{t} ds$  prema položaju napreznja

Gornji pojas	$0 \leq s_z \leq \frac{b_1}{2}$	$\int_0^{s_z} \frac{S_y^*}{t} ds = -\frac{1}{2} h_T^B s_z (b_1 - s_z) - \frac{(h_T^B)^2 (3A_1 + t_0 h_T^B)}{3t_0}$
	$0 \geq s_z \geq -\frac{b_1}{2}$	$\int_0^{s_z} \frac{S_y^*}{t} ds = \frac{1}{2} h_T^B s_z (b_1 + s_z) - \frac{(h_T^B)^2 (3A_1 + t_0 h_T^B)}{3t_0}$
Struk	$-h_T^B \leq s_z \leq h_T^C$	$\int_0^{s_z} \frac{S_y^*}{t} ds = \frac{s_z}{t_0} \left\{ h_T^C A_2 + \frac{t_0}{2} \left[ (h_T^C)^2 - \frac{s_z^2}{3} \right] \right\}$
Donji pojas	$0 \leq s_z \leq \frac{b_2}{2}$	$\int_0^{s_z} \frac{S_y^*}{t} ds = \frac{1}{2} h_T^C s_z (b_2 - s_z) + \frac{(h_T^C)^2 (3A_2 + t_0 h_T^C)}{3t_0}$
	$0 \geq s_z \geq -\frac{b_2}{2}$	$\int_0^{s_z} \frac{S_y^*}{t} ds = -\frac{1}{2} h_T^C s_z (b_2 + s_z) + \frac{(h_T^C)^2 (3A_2 + t_0 h_T^C)}{3t_0}$

Faktori smicanja za navedeni I profil se izračunavaju prema sljedećim izrazima:

$$\kappa_{zz} = \frac{\varphi^2 (1 + \lambda + \psi)^3 \left[ \frac{\varphi}{\psi} (1 + \lambda^2 \mu^3) + \frac{2}{3} \varphi^2 (1 + \lambda \mu^4) + \frac{2}{15} \psi \varphi^3 (1 + \mu^5) + \frac{1}{12} \rho^2 (1 + \lambda \mu^2 \eta^2) \right]}{\left[ \lambda + \frac{1}{3} \psi \left( 1 + \lambda + \frac{1}{4} \psi \right) \right]^2},$$

$$\kappa_{xz} = -\frac{\varphi (1 + \lambda + \psi) \left[ 24\varphi (1 - \lambda^2 \mu^2) + 2\psi \rho^2 (1 - \lambda \mu \eta^2) + 20\psi \varphi^2 (1 - \lambda \mu^3) + 5\psi^2 \varphi^3 (1 - \mu^4) \right]}{2\psi [12\lambda + \psi (4 + \psi + 4\lambda)]},$$

### 5.3. Izračunavanje napreznja štapa poprečnog presjeka s jednom osi simetrije

Prema izrazima (3.1) te (5.1) u nastavku su izračunata napreznja štapa poprečnog presjeka s jednom osi simetrije. Prema (5.1) napreznja su izračunata za gornji pojas, struk te donji pojas. Duljina štapa koja se promatra je 400 milimetara.

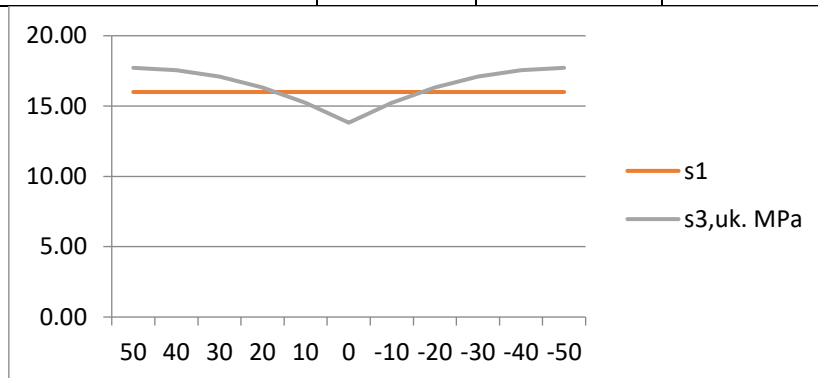
## Naprezanja štapa u gornjem pojasu

U Tablici 5.4 navedena su naprezanja štapa u gornjem pojasu u 11 točaka gornjeg pojasa. Sve točke se nalaze na koordinati  $z$  -30,65 mm.

$\sigma_1$  označava naprezanja prema (3.1) dok  $\sigma_2$  označava naprezanja prema (5.1).

Tablica 5.4 – Naprezanja štapa u gornjem pojasu

Gornji pojas			
koordinata $z$ mm	$s_z$ mm	$\sigma_1$ MPa	$\sigma_3$ MPa
-30,65	50	16,00	17,72
-30,65	40	16,00	17,56
-30,65	30	16,00	17,09
-30,65	20	16,00	16,31
-30,65	10	16,00	15,22
-30,65	0	16,00	13,82
-30,65	-10	16,00	15,22
-30,65	-20	16,00	16,31
-30,65	-30	16,00	17,09
-30,65	-40	16,00	17,56
-30,65	-50	16,00	17,72



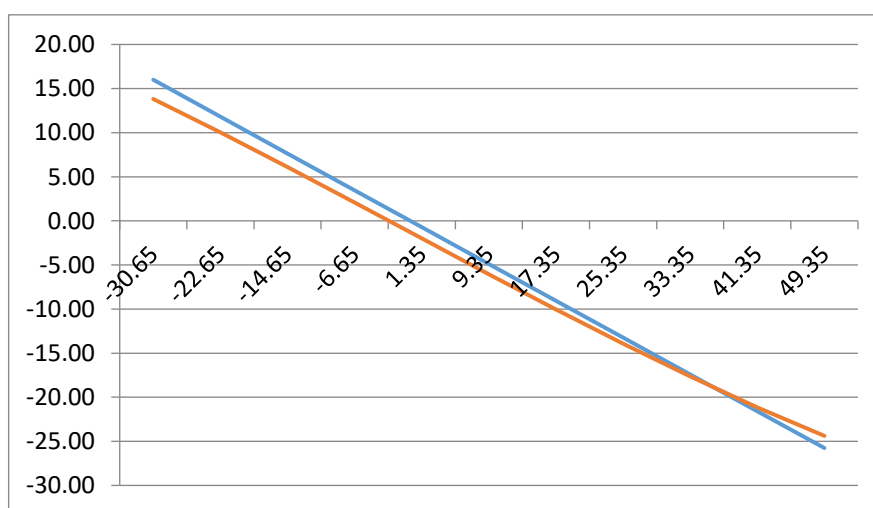
Slika 5.3 – Dijagram naprezanja po poprečnom presjeku gornjeg pojasa

## Naprezanja štapa u struku

U Tablici 5.5 izračunata su naprezanja štapa po struku poprečnog presjeka.

Tablica 5.5 – Naprezanja štapa u struku poprečnog presjeka štapa

Struk			
koordinata $z$ mm	$s_z$ mm	$\sigma_1$ MPa	$\sigma_3$ MPa
-30,65	-30,65	16,00	13,82
-22,65	-22,65	11,82	10,03
-14,65	-14,65	7,65	6,11
-6,65	-6,65	3,47	2,08
1,35	1,35	-0,70	-1,99
9,35	9,35	-4,88	-6,04
17,35	17,35	-9,06	-10,04
25,35	25,35	-13,23	-13,93
33,35	33,35	-17,41	-17,65
41,35	41,35	-21,58	-21,15
49,35	49,35	-25,76	-24,38



Slika 5.4 – Dijagram naprezanja po poprečnom presjeku struka

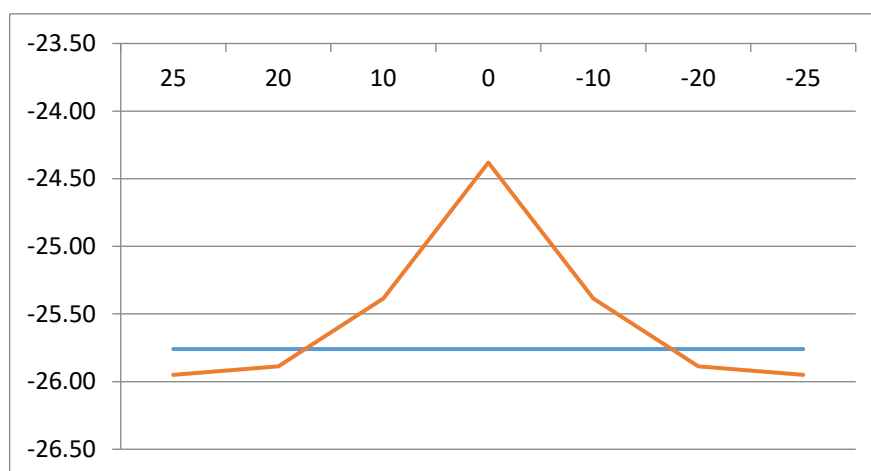


## Naprezanja štapa u donjem pojasu

U Tablici 5.6 izračunata su naprezanja štapa u donjem pojasu poprečnog presjeka. Sve točke se nalaze na koordinati  $z$  49.35 mm.

Tablica 5.6 – Naprezanja štapa u donjem pojasu poprečnog presjeka štapa

Donji pojas			
koordinata $z$ mm	$s_z$ mm	$\sigma_1$ MPa	$\sigma_3$ MPa
49,35	25	-25,76	-25,95
49,35	20	-25,76	-25,89
49,35	10	-25,76	-25,39
49,35	0	-25,76	-24,38
49,35	-10	-25,76	-25,39
49,35	-20	-25,76	-25,89
49,35	-25	-25,76	-25,95



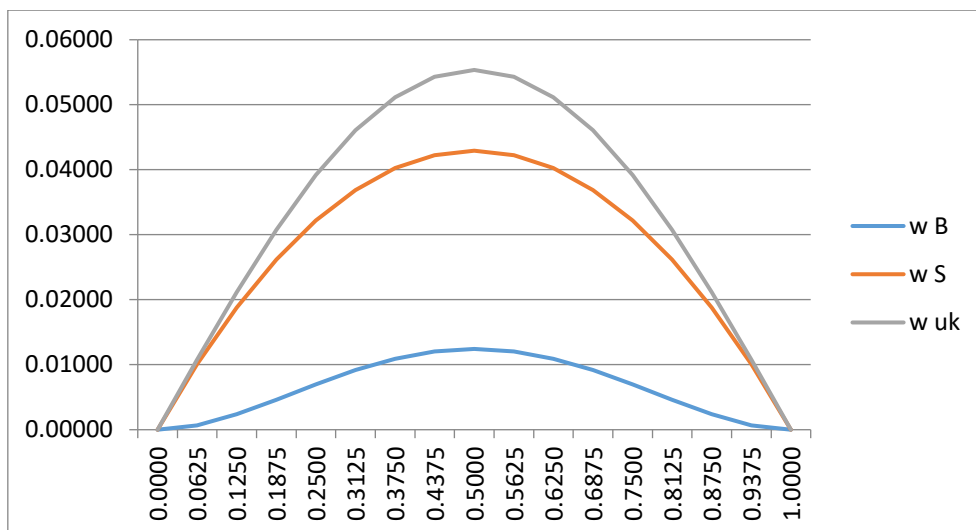
Slika 5.5 – Dijagram naprezanja po poprečnom presjeku donjeg pojasa

## 5.4. Progibi štapa s poprečnim presjekom s jednom osi simetrije

Potrebno je usporediti progibe štapa s poprečnim presjekom s jednom osi simetrije za varijantu  $l/b$  i poprečnim presjekom s dvije osi simetrije za istu varijantu. U nastavku se nalazi Tablica 5.7 te graf (slika 5.6.) koji prikazuju progibe prema cijelom presjeku štapa za različite točke štapa  $x/l$ .

Tablica 5.7 – Vrijednosti progiba za poprečni presjek s jednom osi simetrije

<b>Progibi</b>				
$x/l$	$M_y$	$w_B$	$w_S$	$w_{uk}$
0,0000	-666666,67	0,00000	0,00000	0,00000
0,0625	-432291,67	0,00068	0,01006	0,01074
0,1250	-229166,67	0,00238	0,01878	0,02116
0,1875	-57291,67	0,00461	0,02616	0,03077
0,2500	83333,33	0,00699	0,03220	0,03919
0,3125	192708,33	0,00918	0,03689	0,04607
0,3750	270833,33	0,01092	0,04025	0,05117
0,4375	317708,33	0,01204	0,04226	0,05430
0,5000	333333,33	0,01243	0,04293	0,05536
0,5625	317708,33	0,01204	0,04226	0,05430
0,6250	270833,33	0,01092	0,04025	0,05117
0,6875	192708,33	0,00918	0,03689	0,04607
0,7500	83333,33	0,00699	0,03220	0,03919
0,8125	-57291,67	0,00461	0,02616	0,03077
0,8750	-229166,67	0,00238	0,01878	0,02116
0,9375	-432291,67	0,00068	0,01006	0,01074
1,0000	-666666,67	0,00000	0,00000	0,00000



Slika 5.6 – Dijagram vrijednosti progiba za popr.presjek s jednom osi simetrije

Prema slici 5.6 primjećuje se da vrijednosti progibi od izraza (4.1) koji uključuje utjecaj smicanja imaju veći utjecaj na ukupni progib štapa (izraz 4.2) od izraza (2.2) koji isti ne uključuje. To se vezuje za omjer  $l/b = 4$ , te ponovno potvrđuje tezu da se utjecaj smicanja više očituje kod manjeg omjera  $l/b$  te kada se povećava taj isti omjer, utjecaj smicanja postaje sve manje primjetan.

## 6. Zaključak

U ovom radu, početni zadani parametri su dimenzije poprečnog presjeka I profila te duljina štapa kao i vrijednosti opterećenja te su na temelju toga izračunate vrijednosti unutarnjih te vanjskih reakcija sila štapa. Osim toga, izveden je izraz za maksimalni progib štapa preko diferencijalne jednadžbe elastične linije koji je u nastavku rada iskorišten kako bi se odredili pomaci štapa.

Glavni dio ovog rada bio je usporediti naprezanja te progibe štapova koji imaju poprečni presjek I profila s dvije osi simetrije te poprečni presjek I profila s jednom osi simetrije prema dva izraza. Jedan izraz je prema (3.1) te je to klasični izraz prema kojem se računaju normalna naprezanja u Nauci o čvrstoći, dok je drugi izraz prema (3.2) te (5.1) koji u obzir uzima i utjecaj smicanja na štap. Isto tako, izračunati su progibi prema dva različita izraza, od kojih je isto tako jedan prema Nauci o čvrstoći, a drugi uz utjecaj smicanja.

Prema podacima iz analize naprezanja može se zaključiti da je prilikom analiziranja prve varijante, utjecaj smicanja imao značaja te je kod takvih omjera duljina štapa i širine pojasa poprečnog presjeka potrebno u obzir uzeti utjecaj smicanja. Dok se prilikom računanja druge varijante te posebno treće varijante može primijetiti kako taj utjecaj smicanja kod povećavanja duljine štapa slabi te konačno u trećoj varijanti gotovo pa gubi kompletan značaj odnosno vrijednosti koje su dobivene se praktički mogu i zanemariti.

Isto tako, kod analiziranja pomaka štapa odnosno progiba, može se zaključiti isto. U prvoj varijanti utjecaj smicanja je imao značajniji utjecaj na pomak štapa, dok je već kod druge, a posebno kod treće varijante ta vrijednost postala gotovo zanemariva.

Što se tiče usporedbe poprečnog presjeka I profila s jednom osi simetrije te poprečnog presjeka I profila s dvije osi simetrije, može se zaključiti da su razlike naprezanja prema dva izraza (3.1 i 5.1) kod poprečnog presjeka s jednom osi za gornji pojas praktički jednake. No, kada se promotri graf naprezanja za donji pojas (slika 5.5) može se primijetiti kako linija za poprečni presjek ima oštiri vrh te oštiri prijelaz s dijela linije koja iz linearnog rasta prelazi u još brži rast, dok se na tom mjestu kod poprečnog presjeka s dvije osi simetrije za donji pojas ne primijeti prijelaz već linija ima određeni radijus. Što znači da, kod presjeka s jednom osi simetrije od koordinate  $s_z=10$  naprezanja naglo postaju značajnije veća te nemaju postepen rast. Osim toga, na naprezanjima struka može se primijetiti kako kada se ulazi u područje donjeg pojasa, naprezanja prema nauci o čvrstoći postepeno postaju veća od naprezanja prema izrazu (5.1).

Isto tako, kod usporedbe progiba za varijantu  $l/b=4$  za poprečni presjek s jednom osi simetrije te za poprečni presjek s dvije osi simetrije, može se primijetiti identično pravilo. Odnosno, kod varijanti s manjim omjerom  $l/b$  odnosno manjom duljinom  $l$  izraz  $s$  utjecajem smicanja ima veći utjecaj na ukupni progib od izraza koji smicanje ne uključuje. Međutim, povećavanjem duljine  $l$ , ukoliko širina  $b$  ostaje jednaka, taj utjecaj slabi sve više. Zaključak je da kod obe vrste poprečnog presjeka profila, bilo s jednom ili dvije osi simetrije, navedeno pravilo vrijedi gotovo pa jednako.

## Literatura

1. Alfirević I.: Nauka o čvrstoći I, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, 1978.
2. Matoković, A: Savijanje i uvijanje štapova otvorenog tankostijenog presjeka s utjecajem smicanja, doktorska disertacija, FESB Split, Split 2012.
3. Plazibat B., Matoković A., Vetma V.: Tehnička Mehanika I skripta, Sveučilište u Splitu, Sveučilišni odjel za stručne studije, Split, 2018.
4. Plazibat B., Matoković A., Vetma V.: Nauka o čvrstoći skripta, Sveučilište u Splitu, Sveučilišni odjel za stručne studije, Split 2019.

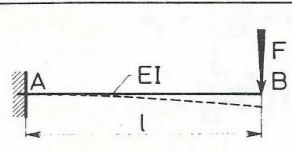
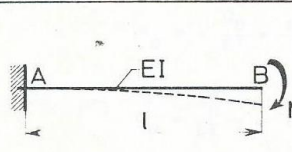
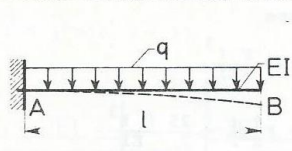
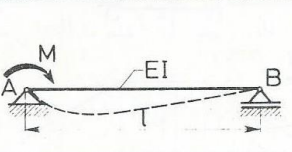
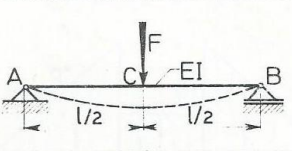
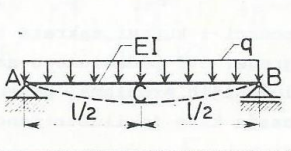
## Prilozi

Prilog 1. – Tablica pomaka i kutova tangente na elastičnu liniju za neke grede

[Alfirević I.: Nauka o čvrstoći I, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, 1978.]

- 250 -

TABLICA 9.2

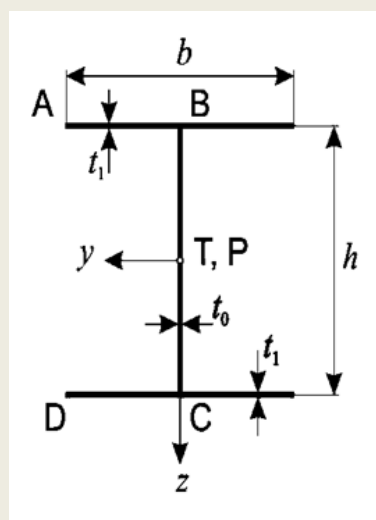
	$w_B = \frac{Fl^3}{3EI}$ $\alpha_B = \frac{Fl^2}{2EI}$
	$w_B = \frac{Ml^2}{2EI}$ $\alpha_B = \frac{Ml}{EI}$
	$w_B = \frac{ql^4}{8EI}$ $\alpha_B = \frac{ql^3}{6EI}$
	$\alpha_A = \frac{Ml}{3EI}$ $\alpha_B = \frac{Ml}{6EI}$
	$w_C = \frac{Fl^3}{48EI}$ $\alpha_A = \alpha_B = \frac{Fl^2}{16EI}$
	$w_C = \frac{5ql^4}{384EI}$ $\alpha_A = \alpha_B = \frac{ql^3}{24EI}$

U tablici su navedene apsolutne vrijednosti.

Prilog 2. – Tablice u kojima su izračunata naprezanja te progibi za različite omjere  $l/b$  te koje sadrže dimenzije i ostale geometrijske karakteristike zadanih profila

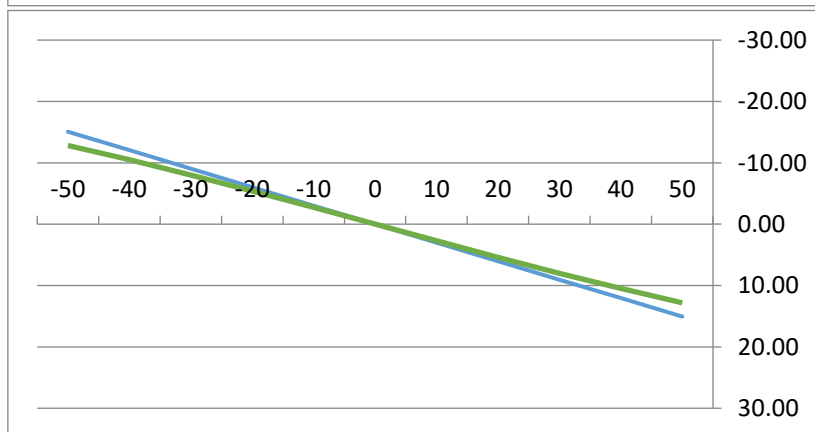
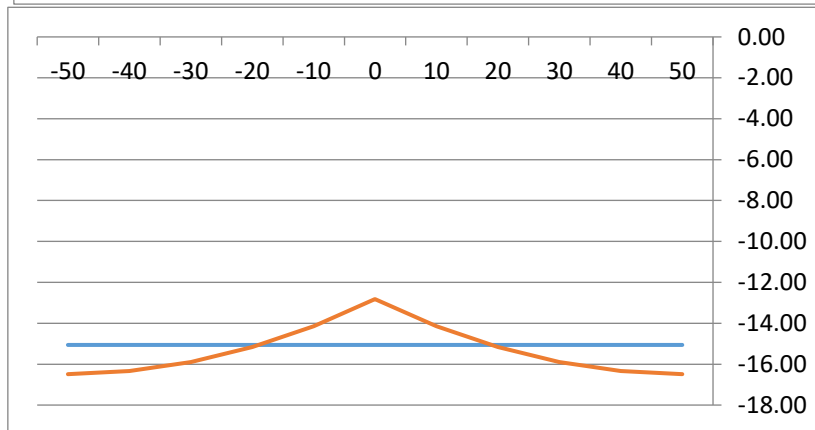
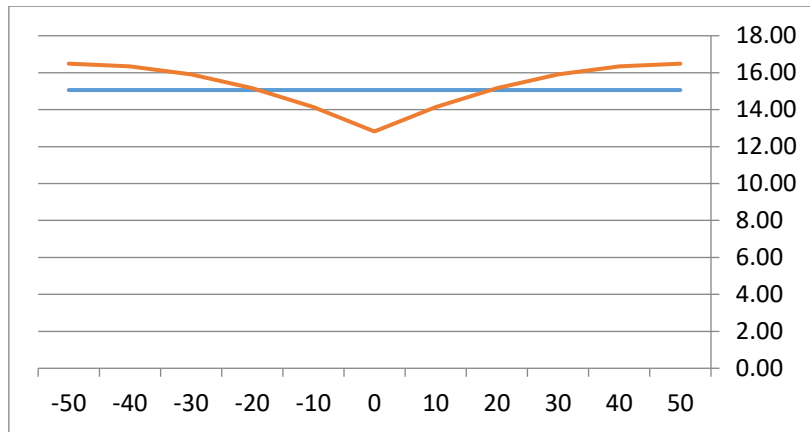
### Varijanta $l/b = 4$

Ulazni parametri		
opterećenje $q$	kN/m	50
duljina $l$	mm	400
modul el. $E$	GPa	210
Poissonov koef $\nu$		0,3
Modul smicanja $G$		80,77
Dimenzije profila		
visina $h$	mm	80
debljina $t_0$	mm	4
debljina $t_1$	mm	5
širina $b$	mm	100
Površina $A_1$	mm <sup>2</sup>	500,00
Površina $A_2$	mm <sup>2</sup>	320,00
Ukupna površina $A$	mm <sup>2</sup>	1320,00
$\psi$		0,64
$\rho$		1,25
$E/G$		2,6
$K_{zz}$		4,69
Karakteristike profila		
Maks. moment $M_y$	Nmm	-666666,67
Moment tromost $I_y$		1770666,67
koordinata $z$	mm	-40
Moment u sredini $M_y$	Nmm	333333,3333
Moment u točki A štapa	Nmm	-666666,6667

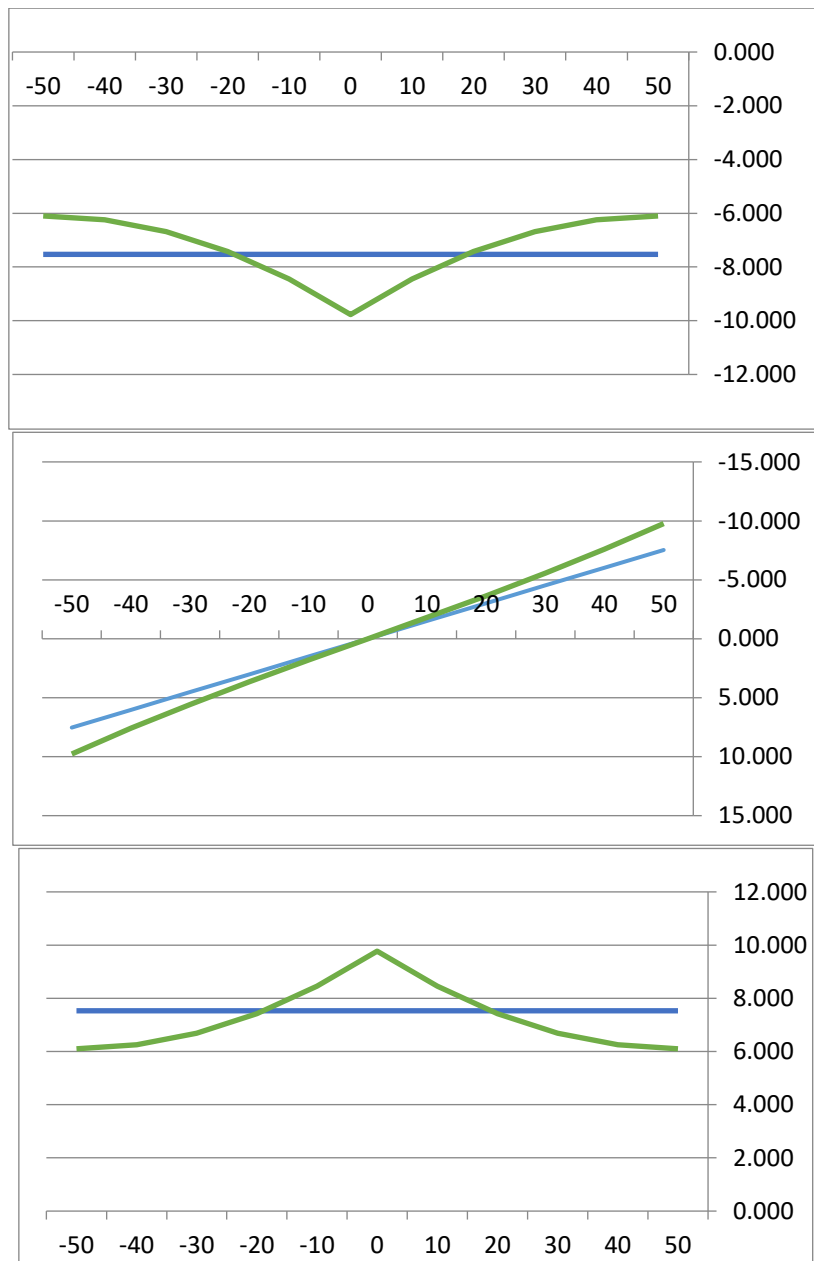




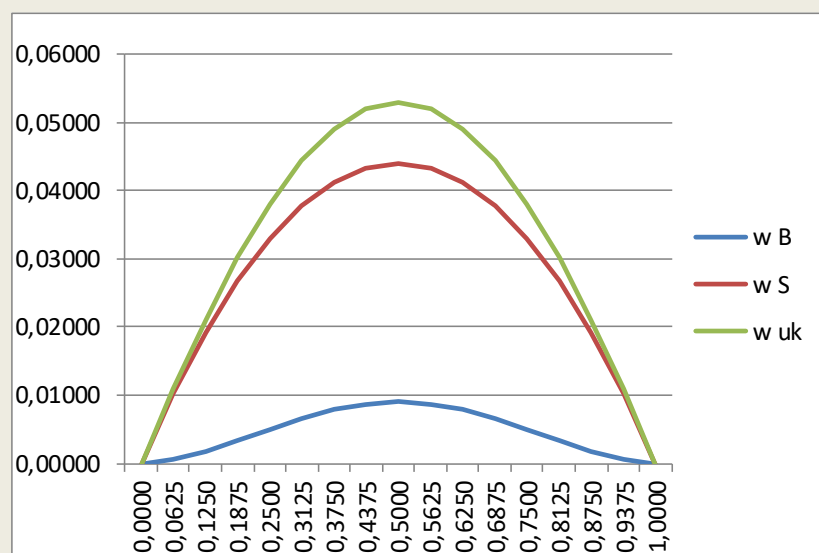
Izračunavanje naprezanja na mjestu uklještenja Prema formuli za naprezanje iz nauke o čvrstoći						
$\sigma_1$ MPa		15,06				
Prema formulama za naprezanje uz utjecaj smicanja Gornji pojas						
koordinata z mm	polozaj Sz mm	$\sigma_1$ MPa	$\sigma_{II}$ MPa	$fS/t ds$	$\sigma_{III}$ MPa	$\sigma_{2,uk.}$ MPa
-40	50	15,060	-18,49	-271333,33	19,92	16,49
-40	40	15,060	-18,49	-269333,33	19,77	16,34
-40	30	15,060	-18,49	-263333,33	19,33	15,90
-40	20	15,060	-18,49	-253333,33	18,60	15,17
-40	10	15,060	-18,49	-239333,33	17,57	14,14
-40	0	15,060	-18,49	-221333,33	16,25	12,82
-40	-10	15,060	-18,49	-239333,33	17,57	14,14
-40	-20	15,060	-18,49	-253333,33	18,60	15,17
-40	-30	15,060	-18,49	-263333,33	19,33	15,90
-40	-40	15,060	-18,49	-269333,33	19,77	16,34
-40	-50	15,060	-18,49	-271333,33	19,92	16,49
Prema formulama za naprezanje uz utjecaj smicanja Struk						
koordinata z mm	polozaj Sz mm	$\sigma_1$ MPa	$\sigma_{II}$ MPa	$fS/t ds$	$\sigma_{III}$ MPa	$\sigma_{2,uk.}$ MPa
-40	-40	15,060	-18,49	-221333,33	16,25	12,82
-32	-32	12,048	-14,79	-180138,67	13,23	10,48
-24	-24	9,036	-11,09	-136896,00	10,05	7,99
-16	-16	6,024	-7,40	-92117,33	6,76	5,39
-8	-8	3,012	-3,70	-46314,67	3,40	2,71
0	0	0,000	0,00	0,00	0,00	0,00
8	8	-3,012	3,70	46314,67	-3,40	-2,71
16	16	-6,024	7,40	92117,33	-6,76	-5,39
24	24	-9,036	11,09	136896,00	-10,05	-7,99
32	32	-12,048	14,79	180138,67	-13,23	-10,48
40	40	-15,060	18,49	221333,33	-16,25	-12,82
Prema formulama za naprezanje uz utjecaj smicanja Donji pojas						
koordinata z mm	polozaj Sz mm	$\sigma_1$ MPa	$\sigma_{II}$ MPa	$fS/t ds$	$\sigma_{III}$ MPa	$\sigma_{2,uk.}$ MPa
40	50	-15,060	18,49	271333,33	-19,92	-16,49
40	40	-15,060	18,49	269333,33	-19,77	-16,34
40	30	-15,060	18,49	263333,33	-19,33	-15,90
40	20	-15,060	18,49	253333,33	-18,60	-15,17
40	10	-15,060	18,49	239333,33	-17,57	-14,14
40	0	-15,060	18,49	221333,33	-16,25	-12,82
40	-10	-15,060	18,49	239333,33	-17,57	-14,14
40	-20	-15,060	18,49	253333,33	-18,60	-15,17
40	-30	-15,060	18,49	263333,33	-19,33	-15,90
40	-40	-15,060	18,49	269333,33	-19,77	-16,34
40	-50	-15,060	18,49	271333,33	-19,92	-16,49



Izračunavanje naprezanja u sredini nosača						
Prema formuli za naprezanje iz nauke o čvrstoći						
$\sigma_1$ MPa		-7,53				
Prema formulama za naprezanje uz utjecaj smicanja						
Gornji pojas						
koordinata z mm	polozaj Sz mm	$\sigma_1$ MPa	$\sigma_{II}$ MPa	fS/t ds	$\sigma_{III}$ MPa	$\sigma_{2,uk.}$ MPa
-40	50	-7,530	-18,49	-271333,33	19,92	-6,10
-40	40	-7,530	-18,49	-269333,33	19,77	-6,25
-40	30	-7,530	-18,49	-263333,33	19,33	-6,69
-40	20	-7,530	-18,49	-253333,33	18,60	-7,42
-40	10	-7,530	-18,49	-239333,33	17,57	-8,45
-40	0	-7,530	-18,49	-221333,33	16,25	-9,77
-40	-10	-7,530	-18,49	-239333,33	17,57	-8,45
-40	-20	-7,530	-18,49	-253333,33	18,60	-7,42
-40	-30	-7,530	-18,49	-263333,33	19,33	-6,69
-40	-40	-7,530	-18,49	-269333,33	19,77	-6,25
-40	-50	-7,530	-18,49	-271333,33	19,92	-6,10
Prema formulama za naprezanje uz utjecaj smicanja						
Struk						
koordinata z mm	polozaj Sz mm	$\sigma_1$ MPa	$\sigma_{II}$ MPa	fS/t ds	$\sigma_{III}$ MPa	$\sigma_{2,uk.}$ MPa
-40	-40	-7,530	-18,49	-221333,33	16,25	-9,77
-32	-32	-6,024	-14,79	-180138,67	13,23	-7,59
-24	-24	-4,518	-11,09	-136896,00	10,05	-5,56
-16	-16	-3,012	-7,40	-92117,33	6,76	-3,65
-8	-8	-1,506	-3,70	-46314,67	3,40	-1,80
0	0	0,000	0,00	0,00	0,00	0,00
8	8	1,506	3,70	46314,67	-3,40	1,80
16	16	3,012	7,40	92117,33	-6,76	3,65
24	24	4,518	11,09	136896,00	-10,05	5,56
32	32	6,024	14,79	180138,67	-13,23	7,59
40	40	7,530	18,49	221333,33	-16,25	9,77
Prema formulama za naprezanje uz utjecaj smicanja						
Donji pojas						
koordinata z mm	polozaj Sz mm	$\sigma_1$ MPa	$\sigma_{II}$ MPa	fS/t ds	$\sigma_{III}$ MPa	$\sigma_{2,uk.}$ MPa
40	50	7,53	18,49	271333,33	-19,92	6,10
40	40	7,53	18,49	269333,33	-19,77	6,25
40	30	7,53	18,49	263333,33	-19,33	6,69
40	20	7,53	18,49	253333,33	-18,60	7,42
40	10	7,53	18,49	239333,33	-17,57	8,45
40	0	7,53	18,49	221333,33	-16,25	9,77
40	-10	7,53	18,49	239333,33	-17,57	8,45
40	-20	7,53	18,49	253333,33	-18,60	7,42
40	-30	7,53	18,49	263333,33	-19,33	6,69
40	-40	7,53	18,49	269333,33	-19,77	6,25
40	-50	7,53	18,49	271333,33	-19,92	6,10

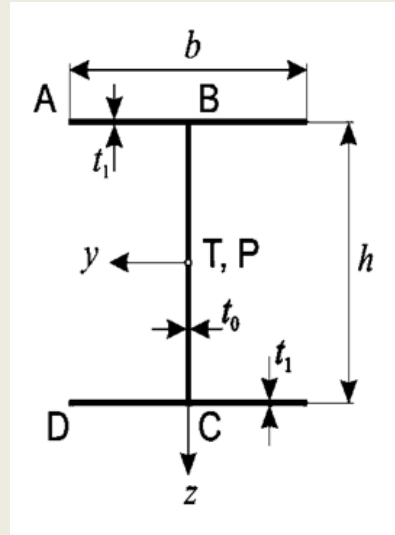


Progibi				
$x/l$	$M_y$	$w_B$	$w_S$	$w_{uk}$
0,0000	-666666,67	0,00000	0,00000	0,00000
0,0625	-432291,67	0,00049	0,01032	0,01081
0,1250	-229166,67	0,00172	0,01926	0,02098
0,1875	-57291,67	0,00333	0,02683	0,03016
0,2500	83333,33	0,00504	0,03302	0,03806
0,3125	192708,33	0,00662	0,03784	0,04446
0,3750	270833,33	0,00788	0,04128	0,04915
0,4375	317708,33	0,00869	0,04334	0,05203
0,5000	333333,33	0,00896	0,04403	0,05299
0,5625	317708,33	0,00869	0,04334	0,05203
0,6250	270833,33	0,00788	0,04128	0,04915
0,6875	192708,33	0,00662	0,03784	0,04446
0,7500	83333,33	0,00504	0,03302	0,03806
0,8125	-57291,67	0,00333	0,02683	0,03016
0,8750	-229166,67	0,00172	0,01926	0,02098
0,9375	-432291,67	0,00049	0,01032	0,01081
1,0000	-666666,67	0,00000	0,00000	0,00000

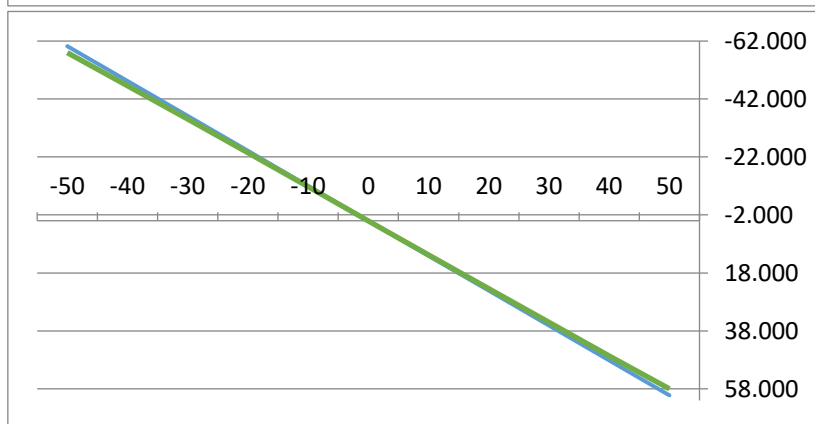
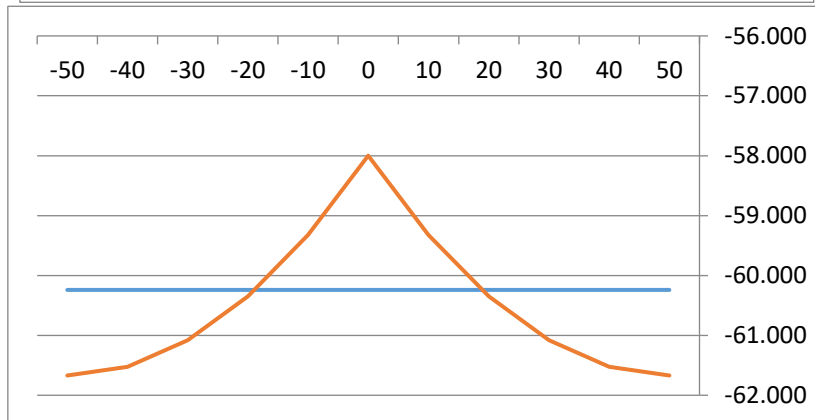
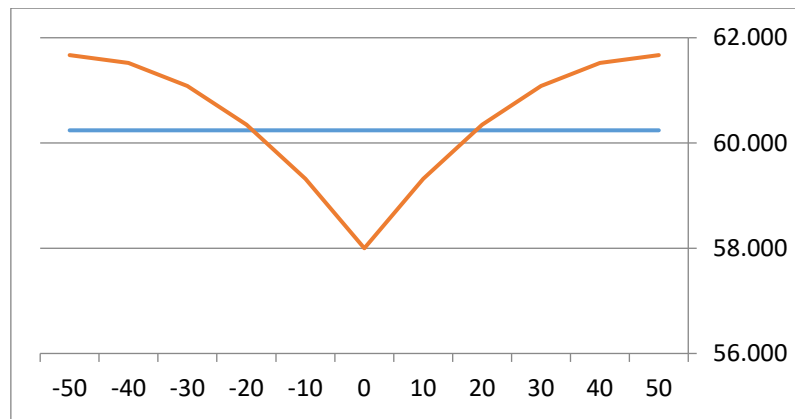


## Varijanta $l/b = 8$

Ulazni parametri		
opterećenje $q$	kN/m	50
duljina $l$	mm	800
modul el. $E$	GPa	210
Poissonov koef $\nu$		0,3
Modul smicanja $G$	GPa	80,77
Dimenzije profila		
visina $h$	mm	80
debljina $t_0$	mm	4
debljina $t_1$	mm	5
širina $b$	mm	100
Površina $A_1$	mm <sup>2</sup>	500,00
Površina $A_2$	mm <sup>2</sup>	320,00
Ukupna površina $A$	mm <sup>2</sup>	1320,00
$\psi$		0,64
$\rho$		1,25
$E/G$		2,6
$K_{zz}$		4,69
Karakteristike profila		
Maks. moment $M_y$	Nmm	-2666666,67
Moment tromost $I_y$	mm <sup>4</sup>	1770666,67
koordinata $z$	mm	-40
Moment u sredini $M_y$	Nmm	1333333,333
Moment u točki A štapa	Nmm	-2666666,667

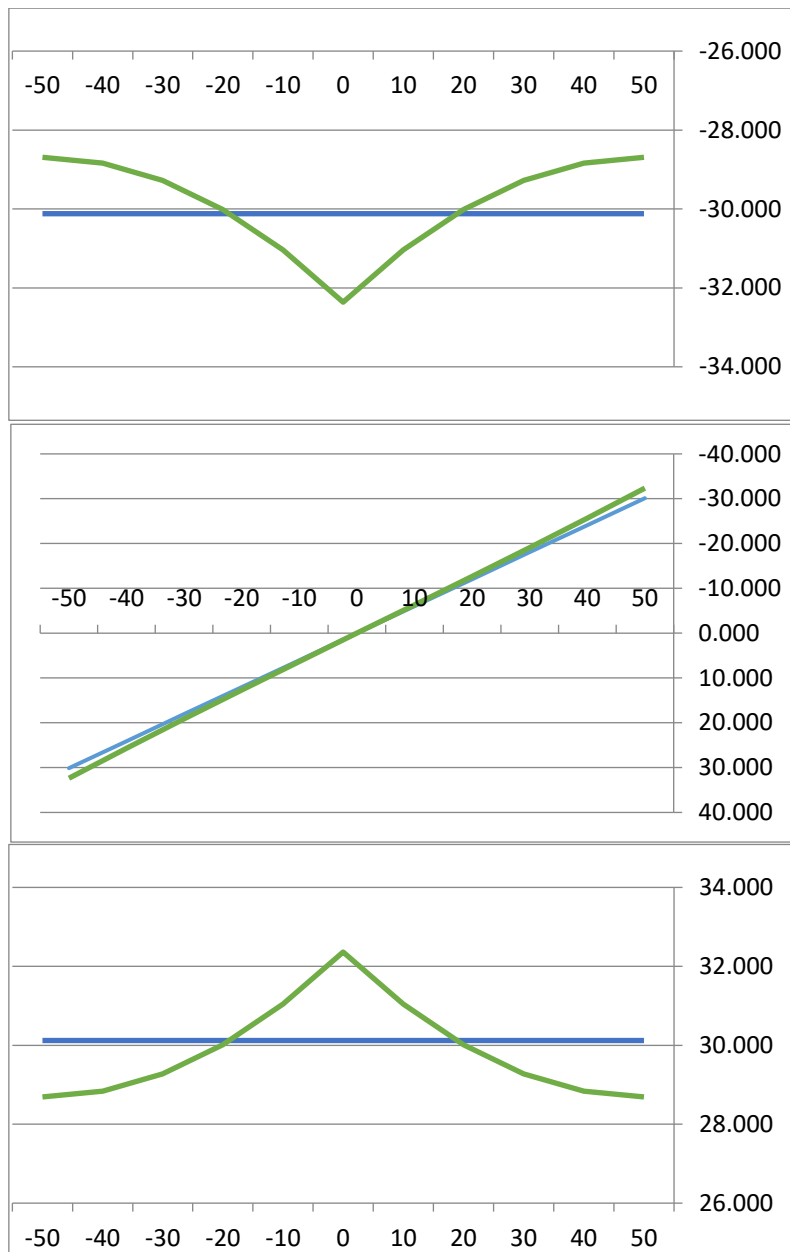


Izračunavanje naprezanja na mjestu uklještenja Prema formuli za naprezanje iz nauke o čvrstoći						
$\sigma_1$ MPa		60,24				
Prema formulama za naprezanje uz utjecaj smicanja Gornji pojas						
koordinata z mm	ozaj Sz t	$\sigma_1$ MPa	$\sigma_{II}$ MPa	JŠ/t ds	$\sigma_{III}$ MPa	$\sigma_{2,uk.}$ MPa
-40	50	60,241	-18,49	-271333,33	19,92	61,67
-40	40	60,241	-18,49	-269333,33	19,77	61,52
-40	30	60,241	-18,49	-263333,33	19,33	61,08
-40	20	60,241	-18,49	-253333,33	18,60	60,35
-40	10	60,241	-18,49	-239333,33	17,57	59,32
-40	0	60,241	-18,49	-221333,33	16,25	58,00
-40	-10	60,241	-18,49	-239333,33	17,57	59,32
-40	-20	60,241	-18,49	-253333,33	18,60	60,35
-40	-30	60,241	-18,49	-263333,33	19,33	61,08
-40	-40	60,241	-18,49	-269333,33	19,77	61,52
-40	-50	60,241	-18,49	-271333,33	19,92	61,67
Prema formulama za naprezanje uz utjecaj smicanja Struk						
koordinata z mm	ozaj Sz t	$\sigma_1$ MPa	$\sigma_{II}$ MPa	JŠ/t ds	$\sigma_{III}$ MPa	$\sigma_{2,uk.}$ MPa
-40	-40	60,241	-18,49	-221333,33	16,25	58,00
-32	-32	48,193	-14,79	-180138,67	13,23	46,63
-24	-24	36,145	-11,09	-136896,00	10,05	35,10
-16	-16	24,096	-7,40	-92117,33	6,76	23,46
-8	-8	12,048	-3,70	-46314,67	3,40	11,75
0	0	0,000	0,00	0,00	0,00	0,00
8	8	-12,048	3,70	46314,67	-3,40	-11,75
16	16	-24,096	7,40	92117,33	-6,76	-23,46
24	24	-36,145	11,09	136896,00	-10,05	-35,10
32	32	-48,193	14,79	180138,67	-13,23	-46,63
40	40	-60,241	18,49	221333,33	-16,25	-58,00
Prema formulama za naprezanje uz utjecaj smicanja Donji pojas						
koordinata z mm	ozaj Sz t	$\sigma_1$ MPa	$\sigma_{II}$ MPa	JŠ/t ds	$\sigma_{III}$ MPa	$\sigma_{2,uk.}$ MPa
40	50	-60,241	18,49	271333,33	-19,92	-61,67
40	40	-60,241	18,49	269333,33	-19,77	-61,52
40	30	-60,241	18,49	263333,33	-19,33	-61,08
40	20	-60,241	18,49	253333,33	-18,60	-60,35
40	10	-60,241	18,49	239333,33	-17,57	-59,32
40	0	-60,241	18,49	221333,33	-16,25	-58,00
40	-10	-60,241	18,49	239333,33	-17,57	-59,32
40	-20	-60,241	18,49	253333,33	-18,60	-60,35
40	-30	-60,241	18,49	263333,33	-19,33	-61,08
40	-40	-60,241	18,49	269333,33	-19,77	-61,52
40	-50	-60,241	18,49	271333,33	-19,92	-61,67

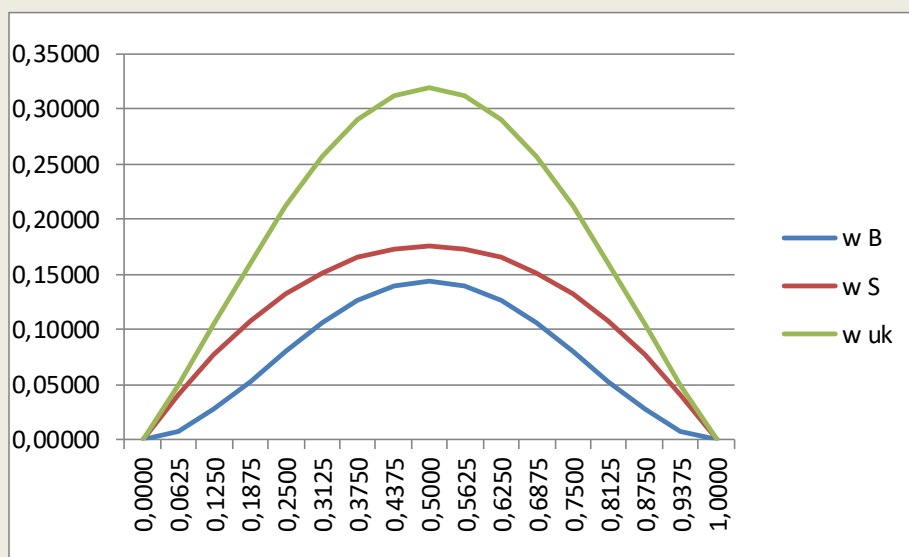




Izračunavanje naprezanja u sredini nosača						
Prema formuli za naprezanje iz nauke o čvrstoći						
$\sigma_1$ MPa		-30,12				
Prema formulama za naprezanje uz utjecaj smicanja						
Gornji pojas						
koordinata z mm	ozaj Sz i	$\sigma_1$ MPa	$\sigma_{II}$ MPa	J <i>S</i> /t ds	$\sigma_{III}$ MPa	$\sigma_{2,uk.}$ MPa
-40	50	-30,120	-18,49	-271333,33	19,92	-28,69
-40	40	-30,120	-18,49	-269333,33	19,77	-28,84
-40	30	-30,120	-18,49	-263333,33	19,33	-29,28
-40	20	-30,120	-18,49	-253333,33	18,60	-30,01
-40	10	-30,120	-18,49	-239333,33	17,57	-31,04
-40	0	-30,120	-18,49	-221333,33	16,25	-32,36
-40	-10	-30,120	-18,49	-239333,33	17,57	-31,04
-40	-20	-30,120	-18,49	-253333,33	18,60	-30,01
-40	-30	-30,120	-18,49	-263333,33	19,33	-29,28
-40	-40	-30,120	-18,49	-269333,33	19,77	-28,84
-40	-50	-30,120	-18,49	-271333,33	19,92	-28,69
Prema formulama za naprezanje uz utjecaj smicanja						
Struk						
koordinata z mm	ozaj Sz i	$\sigma_1$ MPa	$\sigma_{II}$ MPa	J <i>S</i> /t ds	$\sigma_{III}$ MPa	$\sigma_{2,uk.}$ MPa
-40	-40	-30,120	-18,49	-221333,33	16,25	-32,36
-32	-32	-24,096	-14,79	-180138,67	13,23	-25,66
-24	-24	-18,072	-11,09	-136896,00	10,05	-19,12
-16	-16	-12,048	-7,40	-92117,33	6,76	-12,68
-8	-8	-6,024	-3,70	-46314,67	3,40	-6,32
0	0	0,000	0,00	0,00	0,00	0,00
8	8	6,024	3,70	46314,67	-3,40	6,32
16	16	12,048	7,40	92117,33	-6,76	12,68
24	24	18,072	11,09	136896,00	-10,05	19,12
32	32	24,096	14,79	180138,67	-13,23	25,66
40	40	30,120	18,49	221333,33	-16,25	32,36
Prema formulama za naprezanje uz utjecaj smicanja						
Donji pojas						
koordinata z mm	ozaj Sz i	$\sigma_1$ MPa	$\sigma_{II}$ MPa	J <i>S</i> /t ds	$\sigma_{III}$ MPa	$\sigma_{2,uk.}$ MPa
40	50	30,12	18,49	271333,33	-19,92	28,69
40	40	30,12	18,49	269333,33	-19,77	28,84
40	30	30,12	18,49	263333,33	-19,33	29,28
40	20	30,12	18,49	253333,33	-18,60	30,01
40	10	30,12	18,49	239333,33	-17,57	31,04
40	0	30,12	18,49	221333,33	-16,25	32,36
40	-10	30,12	18,49	239333,33	-17,57	31,04
40	-20	30,12	18,49	253333,33	-18,60	30,01
40	-30	30,12	18,49	263333,33	-19,33	29,28
40	-40	30,12	18,49	269333,33	-19,77	28,84
40	-50	30,12	18,49	271333,33	-19,92	28,69

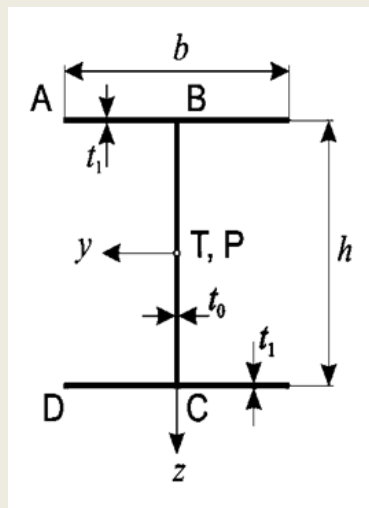


Progibi				
$x/l$	$M_y$	$w_B$	$w_S$	$w_{uk}$
0,0000	-2666666,67	0,00000	0,00000	0,00000
0,0625	-1729166,67	0,00788	0,04128	0,04915
0,1250	-916666,67	0,02745	0,07705	0,10450
0,1875	-229166,67	0,05326	0,10732	0,16058
0,2500	333333,33	0,08068	0,13208	0,21276
0,3125	770833,33	0,10593	0,15134	0,25727
0,3750	1083333,33	0,12606	0,16510	0,29117
0,4375	1270833,33	0,13898	0,17336	0,31234
0,5000	1333333,33	0,14343	0,17611	0,31954
0,5625	1270833,33	0,13898	0,17336	0,31234
0,6250	1083333,33	0,12606	0,16510	0,29117
0,6875	770833,33	0,10593	0,15134	0,25727
0,7500	333333,33	0,08068	0,13208	0,21276
0,8125	-229166,67	0,05326	0,10732	0,16058
0,8750	-916666,67	0,02745	0,07705	0,10450
0,9375	-1729166,67	0,00788	0,04128	0,04915
1,0000	-2666666,67	0,00000	0,00000	0,00000

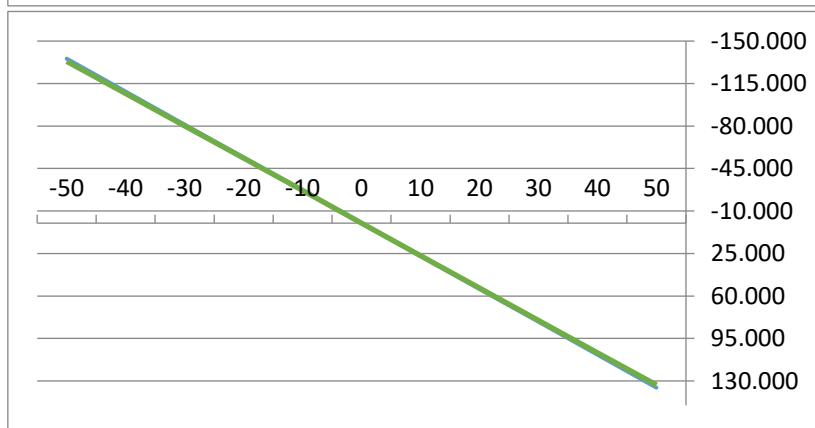
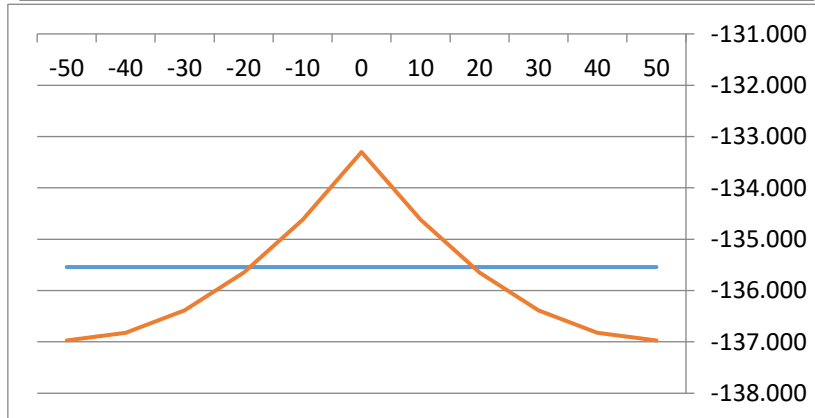
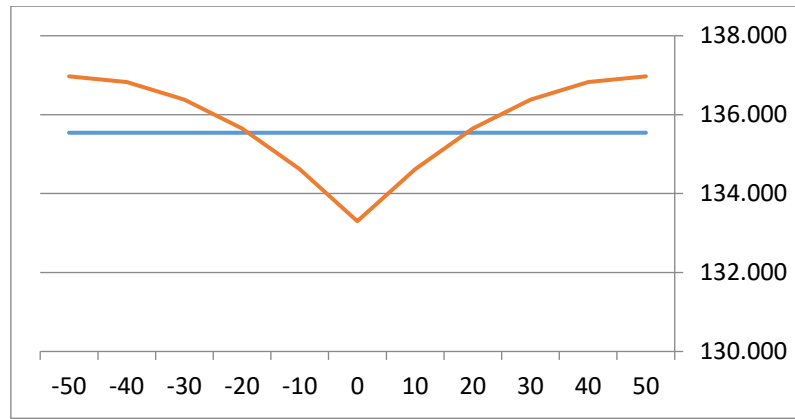


## Varijanta $l/b=12$

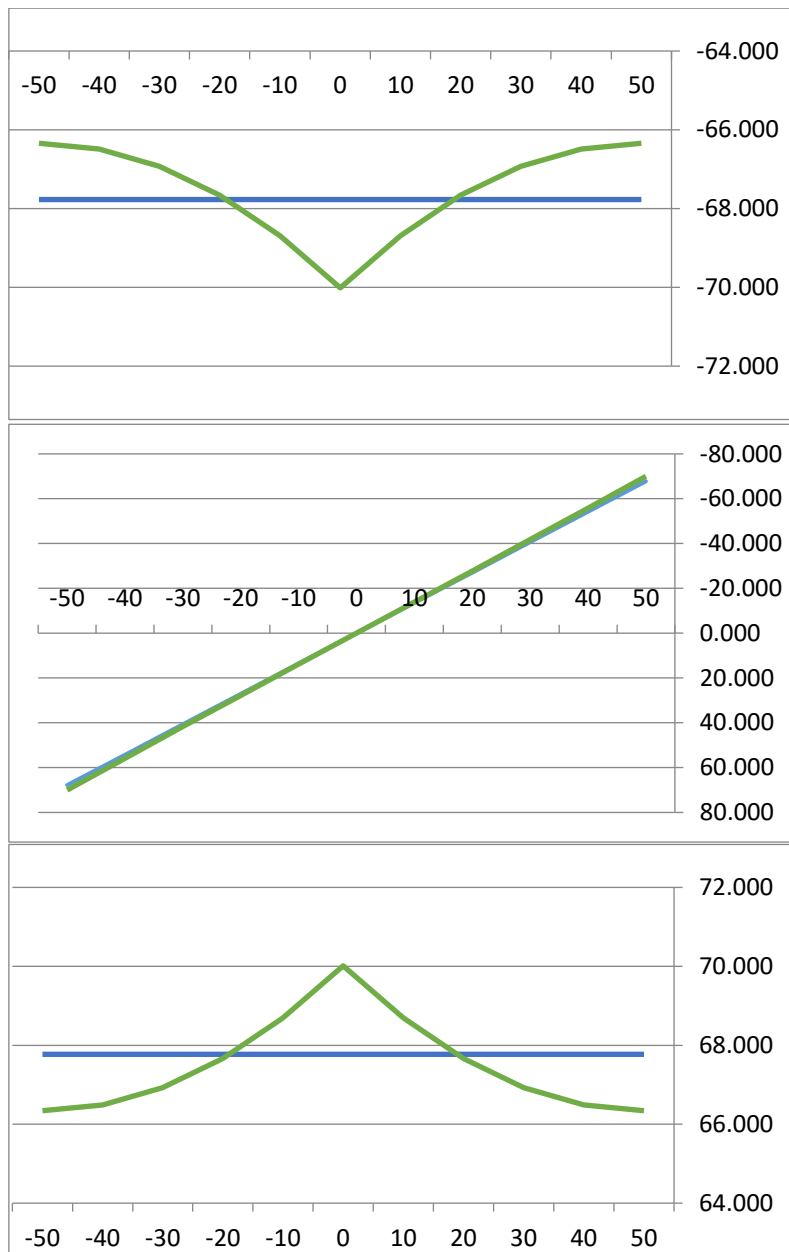
Ulazni parametri		
opterećenje $q$	kN/m	50
duljina $l$	mm	1200
modul el. $E$	GPa	210
Poissonov koef $\nu$		0,3
Modul smicanja $G$	GPa	80,77
Dimenzije profila		
visina $h$	mm	80
debljina $t_0$	mm	4
debljina $t_1$	mm	5
širina $b$	mm	100
Površina $A_1$	mm <sup>2</sup>	500,00
Površina $A_2$	mm <sup>2</sup>	320,00
Ukupna površina $A$	mm <sup>2</sup>	1320,00
$\psi$		0,64
$\rho$		1,25
$E/G$		2,6
$K_{zz}$		4,69
Karakteristike profila		
Maks. moment $M_y$	Nmm	-6000000,00
Moment tromost $I_y$	mm <sup>4</sup>	1770666,67
koordinata $z$	mm	-40
Moment u sredini $M_y$	Nmm	3000000
Moment u točki A štapa	Nmm	-6000000



Izračunavanje napreznja na mjestu uklještenja Prema formuli za napreznje iz nauke o čvrstoći						
$\sigma_1$ MPa		135,54				
Prema formulama za napreznje uz utjecaj smicanja Gornji pojas						
koordinata z mm	polozaj Sz mm	$\sigma_1$ MPa	$\sigma_{II}$ MPa	$fS/t ds$	$\sigma_{III}$ MPa	$\sigma_{2,uk}$ MPa
-40	50	135,542	-18,49	-271333,33	19,92	136,97
-40	40	135,542	-18,49	-269333,33	19,77	136,82
-40	30	135,542	-18,49	-263333,33	19,33	136,38
-40	20	135,542	-18,49	-253333,33	18,60	135,65
-40	10	135,542	-18,49	-239333,33	17,57	134,62
-40	0	135,542	-18,49	-221333,33	16,25	133,30
-40	-10	135,542	-18,49	-239333,33	17,57	134,62
-40	-20	135,542	-18,49	-253333,33	18,60	135,65
-40	-30	135,542	-18,49	-263333,33	19,33	136,38
-40	-40	135,542	-18,49	-269333,33	19,77	136,82
-40	-50	135,542	-18,49	-271333,33	19,92	136,97
Prema formulama za napreznje uz utjecaj smicanja Struk						
koordinata z mm	polozaj Sz mm	$\sigma_1$ MPa	$\sigma_{II}$ MPa	$fS/t ds$	$\sigma_{III}$ MPa	$\sigma_{2,uk}$ MPa
-40	-40	135,542	-18,49	-221333,33	16,25	133,30
-32	-32	108,434	-14,79	-180138,67	13,23	106,87
-24	-24	81,325	-11,09	-136896,00	10,05	80,28
-16	-16	54,217	-7,40	-92117,33	6,76	53,58
-8	-8	27,108	-3,70	-46314,67	3,40	26,81
0	0	0,000	0,00	0,00	0,00	0,00
8	8	-27,108	3,70	46314,67	-3,40	-26,81
16	16	-54,217	7,40	92117,33	-6,76	-53,58
24	24	-81,325	11,09	136896,00	-10,05	-80,28
32	32	-108,434	14,79	180138,67	-13,23	-106,87
40	40	-135,542	18,49	221333,33	-16,25	-133,30
Prema formulama za napreznje uz utjecaj smicanja Donji pojas						
koordinata z mm	polozaj Sz mm	$\sigma_1$ MPa	$\sigma_{II}$ MPa	$fS/t ds$	$\sigma_{III}$ MPa	$\sigma_{2,uk}$ MPa
40	50	-135,542	18,49	271333,33	-19,92	-136,97
40	40	-135,542	18,49	269333,33	-19,77	-136,82
40	30	-135,542	18,49	263333,33	-19,33	-136,38
40	20	-135,542	18,49	253333,33	-18,60	-135,65
40	10	-135,542	18,49	239333,33	-17,57	-134,62
40	0	-135,542	18,49	221333,33	-16,25	-133,30
40	-10	-135,542	18,49	239333,33	-17,57	-134,62
40	-20	-135,542	18,49	253333,33	-18,60	-135,65
40	-30	-135,542	18,49	263333,33	-19,33	-136,38
40	-40	-135,542	18,49	269333,33	-19,77	-136,82
40	-50	-135,542	18,49	271333,33	-19,92	-136,97

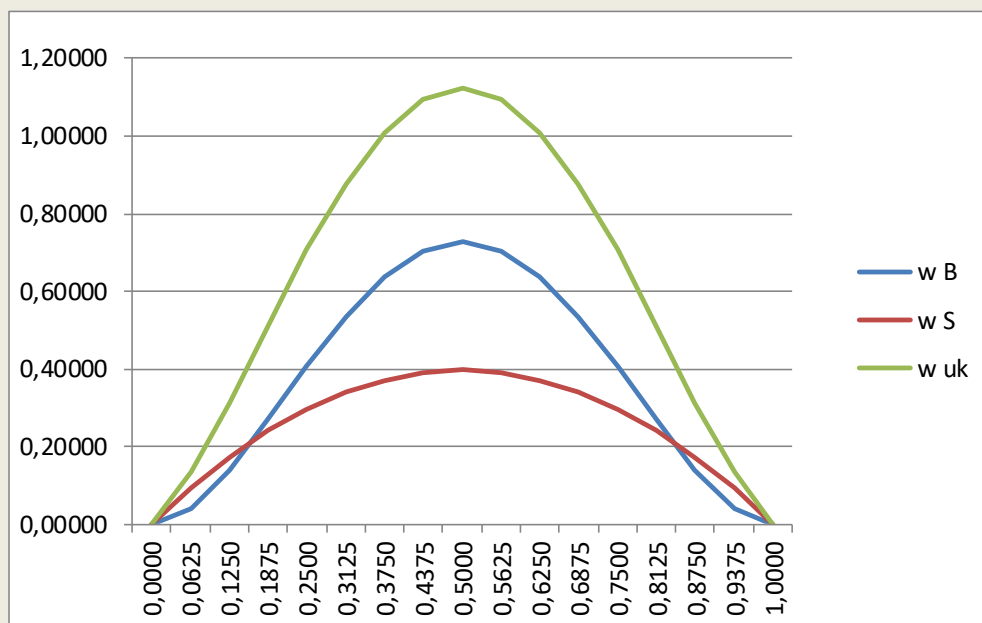


Izračunavanje naprezanja u sredini nosača						
Prema formuli za naprezanje iz nauke o čvrstoći						
$\sigma_1$ MPa		-67,77				
Prema formulama za naprezanje uz utjecaj smicanja						
Gornji pojas						
koordinata z mm	položaj Sz mm	$\sigma_1$ MPa	$\sigma_{II}$ MPa	$fS/t ds$	$\sigma_{III}$ MPa	$\sigma_{2,uk}$ MPa
-40	50	-67,771	-18,49	-271333,33	19,92	-66,34
-40	40	-67,771	-18,49	-269333,33	19,77	-66,49
-40	30	-67,771	-18,49	-263333,33	19,33	-66,93
-40	20	-67,771	-18,49	-253333,33	18,60	-67,66
-40	10	-67,771	-18,49	-239333,33	17,57	-68,69
-40	0	-67,771	-18,49	-221333,33	16,25	-70,01
-40	-10	-67,771	-18,49	-239333,33	17,57	-68,69
-40	-20	-67,771	-18,49	-253333,33	18,60	-67,66
-40	-30	-67,771	-18,49	-263333,33	19,33	-66,93
-40	-40	-67,771	-18,49	-269333,33	19,77	-66,49
-40	-50	-67,771	-18,49	-271333,33	19,92	-66,34
Prema formulama za naprezanje uz utjecaj smicanja						
Struk						
koordinata z mm	položaj Sz mm	$\sigma_1$ MPa	$\sigma_{II}$ MPa	$fS/t ds$	$\sigma_{III}$ MPa	$\sigma_{2,uk}$ MPa
-40	-40	-67,771	-18,49	-221333,33	16,25	-70,01
-32	-32	-54,217	-14,79	-180138,67	13,23	-55,78
-24	-24	-40,663	-11,09	-136896,00	10,05	-41,71
-16	-16	-27,108	-7,40	-92117,33	6,76	-27,74
-8	-8	-13,554	-3,70	-46314,67	3,40	-13,85
0	0	0,000	0,00	0,00	0,00	0,00
8	8	13,554	3,70	46314,67	-3,40	13,85
16	16	27,108	7,40	92117,33	-6,76	27,74
24	24	40,663	11,09	136896,00	-10,05	41,71
32	32	54,217	14,79	180138,67	-13,23	55,78
40	40	67,771	18,49	221333,33	-16,25	70,01
Prema formulama za naprezanje uz utjecaj smicanja						
Donji pojas						
koordinata z mm	položaj Sz mm	$\sigma_1$ MPa	$\sigma_{II}$ MPa	$fS/t ds$	$\sigma_{III}$ MPa	$\sigma_{2,uk}$ MPa
40	50	67,77	18,49	271333,33	-19,92	66,34
40	40	67,77	18,49	269333,33	-19,77	66,49
40	30	67,77	18,49	263333,33	-19,33	66,93
40	20	67,77	18,49	253333,33	-18,60	67,66
40	10	67,77	18,49	239333,33	-17,57	68,69
40	0	67,77	18,49	221333,33	-16,25	70,01
40	-10	67,77	18,49	239333,33	-17,57	68,69
40	-20	67,77	18,49	253333,33	-18,60	67,66
40	-30	67,77	18,49	263333,33	-19,33	66,93
40	-40	67,77	18,49	269333,33	-19,77	66,49
40	-50	67,77	18,49	271333,33	-19,92	66,34



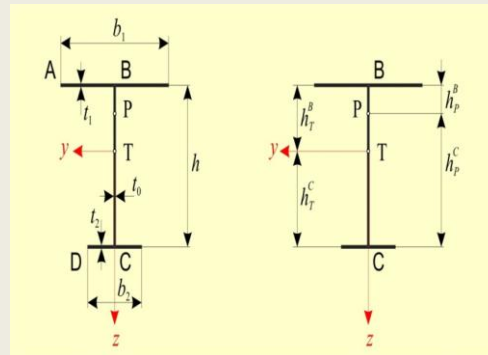


Progibi				
$x/l$	$M_y$	$w_B$	$w_S$	$w_{uk}$
0,0000	-6000000,00	0,00000	0,00000	0,00000
0,0625	-3890625,00	0,03989	0,09287	0,13276
0,1250	-2062500,00	0,13898	0,17336	0,31234
0,1875	-515625,00	0,26964	0,24146	0,51110
0,2500	750000,00	0,40844	0,29719	0,70563
0,3125	1734375,00	0,53626	0,34053	0,87678
0,3750	2437500,00	0,63819	0,37148	1,00967
0,4375	2859375,00	0,70360	0,39006	1,09366
0,5000	3000000,00	0,72612	0,39625	1,12237
0,5625	2859375,00	0,70360	0,39006	1,09366
0,6250	2437500,00	0,63819	0,37148	1,00967
0,6875	1734375,00	0,53626	0,34053	0,87678
0,7500	750000,00	0,40844	0,29719	0,70563
0,8125	-515625,00	0,26964	0,24146	0,51110
0,8750	-2062500,00	0,13898	0,17336	0,31234
0,9375	-3890625,00	0,03989	0,09287	0,13276
1,0000	-6000000,00	0,00000	0,00000	0,00000



## I profil s jednom osi simetrije (varijanta $l/b=4$ )

Ulazni parametri		
opterećenje $q$	kN/m	50
duljina $l$	mm	400
modul el. $E$	GPa	210
Poissonov koef $\nu$		0,3
Modul smicanja $G$	GPa	80,77
Dimenzije profila		
visina $h$	mm	80
debljina $t_0$	mm	4
debljina $t_1$	mm	5
debljina $t_2$	mm	5
širina $b_1$	mm	100
širina $b_2$	mm	50
$h_T^B$	mm	30,65
$h_T^C$	mm	49,35
Površina $A_1$	mm <sup>2</sup>	500,00
Površina $A_2$	mm <sup>2</sup>	250,00
Površina $A_0$	mm <sup>2</sup>	320,00
Ukupna površina $A$	mm <sup>2</sup>	1070,00
koeficijenti		
$\psi$		0,64
$\rho$		1,25
$\eta$		0,5
$\mu$		1,61
$\varphi$		0,38
$\lambda$		0,5
$E/G$		2,6
$k_{zz}$		3,71
$k_{xz}$		-0,1336
Karakteristike profila		
Maks. moment $M_y$	Nmm	-666666,67
Moment tromost $I_y$	mm <sup>4</sup>	1277208,72
Moment u sredini $M_y$	Nmm	333333,33
Moment u točki A štapa	Nmm	-666666,67



Izračunavanje naprezanja na mjestu uklještenja							
Prema formuli za naprezanje iz nauke o čvrstoći							
$\sigma_B$ MPa		-16,00					
$\sigma_C$ MPa		-25,76					
Prema formulama za naprezanje uz utjecaj smicanja							
Gornji pojas							
koordinata z mm	polozaj Sz mm	$\sigma_I$ MPa	$\sigma_{II}$ MPa	$fS/t ds$	$\sigma_{III}$ MPa	$\sigma_{IV}$	$\sigma_{2,uk}$ MPa
-30,65	50	16,00	-13,815	-165379,52	16,83	-1,299	17,72
-30,65	40	16,00	-13,815	-163846,80	16,68	-1,299	17,56
-30,65	30	16,00	-13,815	-159248,67	16,21	-1,299	17,09
-30,65	20	16,00	-13,815	-151585,12	15,43	-1,299	16,31
-30,65	10	16,00	-13,815	-140856,15	14,34	-1,299	15,22
-30,65	0	16,00	-13,815	-127061,76	12,93	-1,299	13,82
-30,65	-10	16,00	-13,815	-140856,15	14,34	-1,299	15,22
-30,65	-20	16,00	-13,815	-151585,12	15,43	-1,299	16,31
-30,65	-30	16,00	-13,815	-159248,67	16,21	-1,299	17,09
-30,65	-40	16,00	-13,815	-163846,80	16,68	-1,299	17,56
-30,65	-50	16,00	-13,815	-165379,52	16,83	-1,299	17,72
Prema formulama za naprezanje uz utjecaj smicanja							
Struk							
koordinata z mm	polozaj Sz mm	$\sigma_I$ MPa	$\sigma_{II}$ MPa	$fS/t ds$	$\sigma_{III}$ MPa	$\sigma_{IV}$	$\sigma_{2,uk}$ MPa
-30,65	-30,65	16,00	-13,815	-127045,64	12,931	-1,299	13,82
-22,65	-22,65	11,82	-10,209	-95494,94	9,720	-1,299	10,03
-14,65	-14,65	7,65	-6,603	-62494,64	6,361	-1,299	6,11
-6,65	-6,65	3,47	-2,997	-28556,73	2,907	-1,299	2,08
1,35	1,35	-0,70	0,609	5806,77	-0,591	-1,299	-1,99
9,35	9,35	-4,88	4,214	40083,87	-4,080	-1,299	-6,04
17,35	17,35	-9,06	7,820	73762,58	-7,508	-1,299	-10,04
25,35	25,35	-13,23	11,426	106330,88	-10,823	-1,299	-13,93
33,35	33,35	-17,41	15,032	137276,79	-13,973	-1,299	-17,65
41,35	41,35	-21,58	18,638	166088,29	-16,905	-1,299	-21,15
49,35	49,35	-25,76	22,244	192253,39	-19,568	-1,299	-24,38
Prema formulama za naprezanje uz utjecaj smicanja							
Donji pojas							
koordinata z mm	polozaj Sz mm	$\sigma_I$ MPa	$\sigma_{II}$ MPa	$fS/t ds$	$\sigma_{III}$ MPa	$\sigma_{IV}$	$\sigma_{2,uk}$ MPa
49,35	25	-25,76	22,244	207660,98	-21,14	-1,299	-25,95
49,35	20	-25,76	22,244	207044,16	-21,07	-1,299	-25,89
49,35	10	-25,76	22,244	202109,58	-20,57	-1,299	-25,39
49,35	0	-25,76	22,244	192240,42	-19,57	-1,299	-24,38
49,35	-10	-25,76	22,244	202109,58	-20,57	-1,299	-25,39
49,35	-20	-25,76	22,244	207044,16	-21,07	-1,299	-25,89
49,35	-25	-25,76	22,244	207660,98	-21,14	-1,299	-25,95

