

# UVIJANJE TANKOSTJENIH ŠTAPOVA OTVORENOG PRESJEKA

---

**Turčinov, Augustin**

**Master's thesis / Specijalistički diplomski stručni**

**2021**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Split / Sveučilište u Splitu**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:228:120665>

*Rights / Prava:* [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-03-06**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of University Department of Professional Studies](#)



UNIVERSITY OF SPLIT



**SVEUČILIŠTE U SPLITU**  
**SVEUČILIŠNI ODJEL ZA STRUČNE STUDIJE**

Specijalistički diplomski stručni studij Strojstvo

**AUGUSTIN TURČINOV**

**ZAVRŠNI RAD**

**UVIJANJE TANKOSTJENIH ŠTAPOVA  
OTVORENOG PRESJEKA**

Split, srpanj 2021.

**SVEUČILIŠTE U SPLITU**  
**SVEUČILIŠNI ODJEL ZA STRUČNE STUDIJE**

Specijalistički diplomski stručni studij Strojtarstvo

**Predmet:** Čvrstoća konstrukcija

**Z A V R Š N I R A D**

**Kandidat:** Augustin Turčinov

**Naslov rada:** Uvijanje tankostjenih štapova otvorenog presjeka

**Mentor:** dr. sc. Ado Matoković, prof. v. š. u trajnom zvanju

Split, srpanj 2021.

**REPUBLIKA HRVATSKA**  
**SVEUČILIŠTE U SPLITU**  
**Sveučilišni odjel za stručne studije**

**Studij:** Strojarstvo  
**Predmet:** Čvrstoća konstrukcija  
**Nastavnik:** dr. sc. Ado Matoković, prof. v. š. u trajnom zvanju

## **ZADATAK**

**Kandidat:** Augustin Turčinov

**Zadatak:** Uvijanje tankostjenih štapova otvorenog presjeka

U radu je potrebno:

- u uvodnom dijelu ukratko opisati tankostjene štapove otvorenog poprečnog presjeka s definicijama osnovnih geometrijskih karakteristika poprečnog presjeka;
- u Excelu napraviti program za izračunavanje geometrijskih karakteristika poprečnog presjeka te ukupnih normalnih naprezanja;
- napisati i dati rješenje diferencijalne jednadžbe savijanja elastične linije konzolnog nosača te napisati i dati rješenje diferencijalne jednadžbe uvijanja konzolnog nosača oko pola;
- izvršiti proračun te usporediti rezultate svih varijanti štapova otvorenog poprečnog presjeka;
- u završnom dijelu rada obrazložiti rezultate;



## **Sažetak**

U ovom završnom radu napravljen je proračun naprezanja i pomaka konzolnog nosača otvorenog tankostjenog poprečnog presjeka za slučaj opterećenja okomitom silom na slobodnom kraju konzolnog nosača koja prolazi težištem poprečnog presjeka. Proračun se vršio za dva osnovna primjera, od kojih je svaki napravljen za tri varijante primjera pod uvjetom da površina poprečnog presjeka ostane nepromijenjena. Rezultati su prikazani grafički i tablično pomoću programskog paketa Excel koje su dane u prilogu dokumenta.

## **Summary (Twisting of thin-walled rods with open cross-section)**

In this bachelor thesis, the stress and strain calculation of the cantilever girder of open thin-walled cross-section for the case of vertical force loading at the free end of the cantilever girder passing through the center of gravity of the cross-section is made. The calculation was performed for two basic examples, each of which was made for three variants of the example provided that the cross-sectional area remained unchanged. The results are presented graphically and tabularly using the Excel software package given in the attached document.

**SADRŽAJ**

Sažetak .....	2
Summary (Twisting of thin-walled rods with open cross-section) .....	2
1. Tankostjeni štapovi otvorenog presjeka.....	5
2. Geometrijske karakteristike .....	7
3. Diferencijalne jednačbe savijanja i uvijanja konzolnog nosača .....	9
3.1. Diferencijalna jednačba savijanja elastične linije konzolnog nosača .....	9
3.2. Diferencijalna jednačba uvijanja konzolnog nosača oko pola.....	10
4. Izrazi za naprezanje.....	12
5. Uvijanje tankostjenog štapa s poprečnim presjekom prema slici .....	13
5.1. Uvijanje tankostjenog štapa varijanta 1A.....	13
5.2. Grafički prikaz naprezanja varijanti 1A, 2A i 3A .....	22
6. Uvijanje tankostjenog štapa s poprečnim presjekom prema slici .....	24
6.1. Uvijanje tankostjenog štapa varijanta 1B .....	24
6.2. Grafički prikaz naprezanja varijanti 1B, 2B i 3B .....	34
7. Zaključak.....	36
Literatura .....	37
Prilozi .....	38

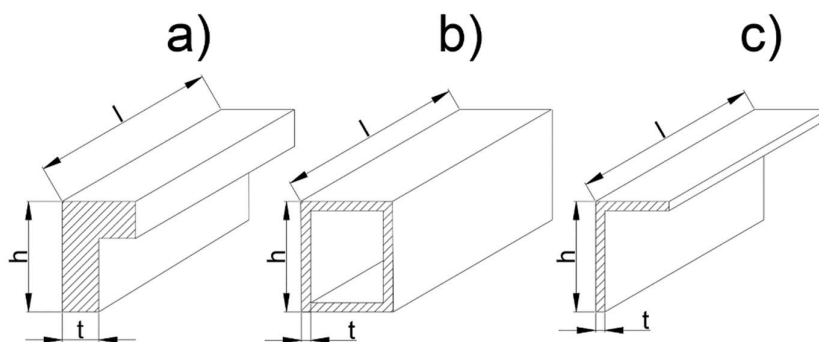
## Popis slika

SLIKA 1.1 – A) ŠTAP PUNOG PRESJEKA; B) ŠTAP ZATVORENOG TANKOSTJENOG PRESJEKA; C) ŠTAP OTVORENOG TANKOSTJENOG PRESJEKA.....	5
SLIKA 1.2 - SREDNJA PLOHA TANKOSTJENOG ŠTAPA.....	5
SLIKA 1.3 - PRAVOKUTNI I KRIVOCRTNI KOORDINATNI SUSTAV[1].....	6
SLIKA 1.4 - SEKTORSKA KOORDINATA[1] .....	6
SLIKA 2.1 - PRIMJERI ŠTAPOVA OTVORENOG POPREČNOG PRESJEKA.....	7
SLIKA 3.1 – TANKOSTJENI ŠTAP OTVORENOG POPREČNOG PRESJEKA.....	9
SLIKA 5.1 - VARIJANTE PRIMJERA A .....	13
SLIKA 5.2 - PRESJEK TANKOSTJENOG ŠTAPA I SREDNJA LINIJA PRESJEKA.....	13
SLIKA 5.3 - DIJAGRAM Y I Z KOORDINATA .....	14
SLIKA 5.4 - A) KOORDINATE TEŽIŠTA, B) GLAVNA KOORDINATA Y, C) GLAVNA KOORDINATA Z.....	15
SLIKA 5.5 - SEKTORSKA KOORDINATA $\Omega'$ .....	15
SLIKA 5.6 - POLOŽAJ GLAVNOG POLA .....	16
SLIKA 5.7 - RASPODJELA GLAVNE SEKTORSKE KOORDINATE $\Omega$ .....	17
SLIKA 5.8 – TANKOSTJENI ŠTAP OPTEREĆEN KONCENTRIRANOM SILOM F .....	17
SLIKA 5.9 - DIJAGRAM BIMOMENTA B .....	19
SLIKA 5.10 - NAPREZANJA U KARAKTERISTIČNIM TOČKAMA.....	20
SLIKA 5.11 - PROGIB TANKOSTJENOG ŠTAPA .....	21
SLIKA 5.12 - KUT UVIJANJA TANKOSTJENOG ŠTAPA.....	21
SLIKA 5.13 – DIJAGRAM NAPREZANJA OD MOMENTA SAVIJANJA $M_{y_0}$ .....	22
SLIKA 5.14 – DIJAGRAM NAPREZANJA OD BIMOMENTA B.....	23
SLIKA 5.15 – DIJAGRAM UKUPNIH NAPREZANJA $M_{y_0} + B$ .....	23
SLIKA 6.1 - VARIJANTE PRIMJERA B .....	24
SLIKA 6.2 – POPREČNI PRESJEK ŠTAPA I SREDNJA LINIJA PRESJEKA .....	25
SLIKA 6.3 - DIJAGRAM Y I Z KOORDINATA .....	25
SLIKA 6.4 - A) KOORDINATE TEŽIŠTA, B) GLAVNA KOORDINATA Y, C) GLAVNA KOORDINATA Z .....	26
SLIKA 6.5 - SEKTORSKA KOORDINATA $\Omega'$ .....	27
SLIKA 6.6 - POLOŽAJ GLAVNOG POLA .....	28
SLIKA 6.7 - RASPODJELA GLAVNE SEKTORSKE KOORDINATE .....	28
SLIKA 6.8 – TANKOSTJENI ŠTAP OPTEREĆEN KONCENTRIRANOM SILOM F .....	29
SLIKA 6.9 - DIJAGRAM BIMOMENTA B .....	30
SLIKA 6.10 - NAPREZANJA U KARAKTERISTIČNIM TOČKAMA.....	32
SLIKA 6.11 - PROGIB TANKOSTJENOG ŠTAPA .....	33
SLIKA 6.12 – DIJAGRAM NAPREZANJA OD MOMENTA SAVIJANJA $M_{y_0}$ .....	34
SLIKA 6.13 – DIJAGRAM NAPREZANJA OD BIMOMENTA B.....	35
SLIKA 6.14 – DIJAGRAM UKUPNIH NAPREZANJA $M_{y_0} + B$ .....	35

## 1. Tankostjeni štapovi otvorenog presjeka

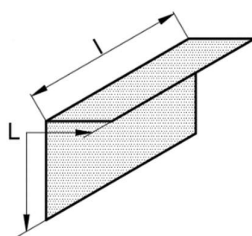
Štapovi su čvrsta deformabilna tijela malih dimenzija poprečnog presjeka ( $h$ ,  $t$ ) prema duljini ( $l$ ). Dije se na dvije osnovne skupine:

- štapovi punog presjeka (dimenzije presjeka približno jednake,  $h \approx t$ ) (slika 1.1a)
- štapovi tankostjenog presjeka (najmanja dimenzija presjeka mnogo manja od ostalih,  $h \geq 10t$ ) (slika 1.1b,c) [1]



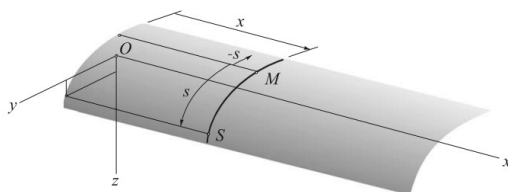
Slika 1.1 – a) štap punog presjeka; b) štap zatvorenog tankostjenog presjeka; c) štap otvorenog tankostjenog presjeka

Tankostjeni štapovi s obzirom na konturu presjeka mogu biti sa zatvorenim i otvorenim presjekom. U ovom radu biti će prikazano ponašanje tankostjenih štapova s otvorenim presjekom pri zadanom opterećenju. Pri opterećenju tankostjenih štapova analizira se srednja ploha štapa odnosno srednja linija presjeka (slika 1.2). To je dopušteno zbog svojstva tankostjenih štapova da je debljina presjeka mnogo manja od ostalih dimenzija presjeka. [1]



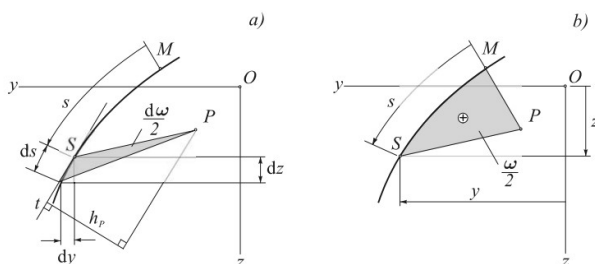
Slika 1.2 - Srednja ploha tankostjenog štapa

Srednja ploha je ploha kojoj se svaka točka nalazi na raspolovnici debljine stjenke presjeka. Ukoliko se srednja ploha presječe s poprečnom ravninom okomitom na uzdužnu os štapa dobiva se srednja linija. Određivanje položaja točke  $S$  moguće je trima pravokutnim koordinatama  $S(x, y, z)$  ili dvjema koordinatama  $S(x, s)$ , gdje je prva koordinata pravokutna a druga krivocrtna koja je određena u odnosu na ishodišnu točku  $M$  (slika 1.3).[1]



Slika 1.3 - Pravokutni i krivocrtni koordinatni sustav[1]

Također položaj točke  $S$  moguće je odrediti s pomoću sektorske koordinate  $\omega$   $S(x, \omega)$ , koja se određuje u odnosu na ishodišnu točku  $M$  i pol  $P$ . Sektorska koordinata jednaka je dvostrukoj površini koju opiše radijvektor  $\underline{PS}$ , iz pola  $P$ , od točke  $M$  do točke  $S$  (slika 1.4 ), može biti pozitivna, negativna ili jednaka nuli.[1]



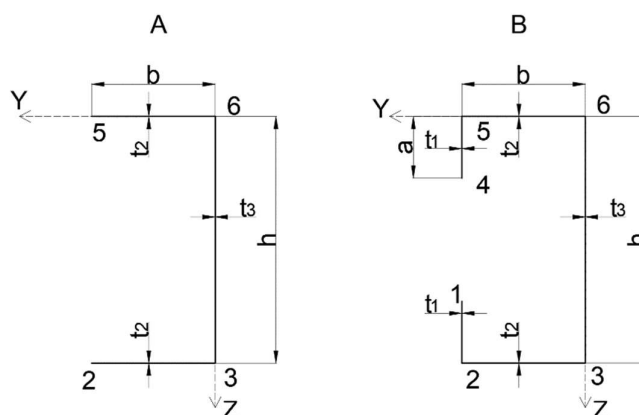
Slika 1.4 - Sektorska koordinata[1]

$$\omega = \int_0^s h_p ds, \quad d\omega = h_p ds \quad (1.1)$$

$h=h(s)$  je okomica iz pola  $P$  na tangentu u točki  $S$ .

## 2. Geometrijske karakteristike

U ovom radu biti će prikazana dva primjera tankostjenih štapova otvorenog poprečnog presjeka (slika 2.1). Vršit će se provjera naprezanja i progiba za svaki od navedenih primjera u 3 varijante gdje će se mijenjati dimenzije presjeka uz uvjet da površina presjeka bude konstantna.



Slika 2.1 - Primjeri štapova otvorenog poprečnog presjeka

Koordinate težišta računaju se prema:

$$y_T' = \frac{S_z'}{A}, \quad z_T' = \frac{S_y'}{A} \quad (2.1)$$

$S_z'$  i  $S_y'$  su statički momenti površine poprečnog presjeka dani izrazom:

$$S_z' = \int_A y dA, \quad S_y' = \int_A z dA \quad (2.2)$$

Glavni moment tromosti s obzirom na težišnu os  $y_0$  računa se prema:

$$I_{y_0} = \int_A z^2 dA = \sum_A t \int z \cdot z \cdot ds \quad (2.3)$$

Izraz za sektorski devijacijski moment tromosti glasi:

$$I_{y_0\omega_1} = \int_A z \omega_1 dA = t \int_A z \cdot \omega_1 \cdot ds \quad (2.4)$$

Položaj glavnog pola računa se prema izrazu:

$$\Delta_y = \frac{I_{y\omega 1}}{I_{y0}} \quad (2.5)$$

Glavne sektorske koordinate u karakterističnim točkama poprečnog presjeka dane su izrazima:

$$\omega_1 = \omega_2 - (|\Delta_y| + b) \cdot a \quad (2.6)$$

$$\omega_2 = \omega_3 - \frac{h}{2} \cdot b \quad (2.7)$$

$$\omega_3 = |\Delta_y| \cdot \frac{h}{2} \quad (2.8)$$

$$\omega_4 = -\omega_1 \quad (2.9)$$

$$\omega_5 = -\omega_2 \quad (2.10)$$

$$\omega_6 = -\omega_3 \quad (2.11)$$

Izraz za glavni sektorski moment tromosti glasi:

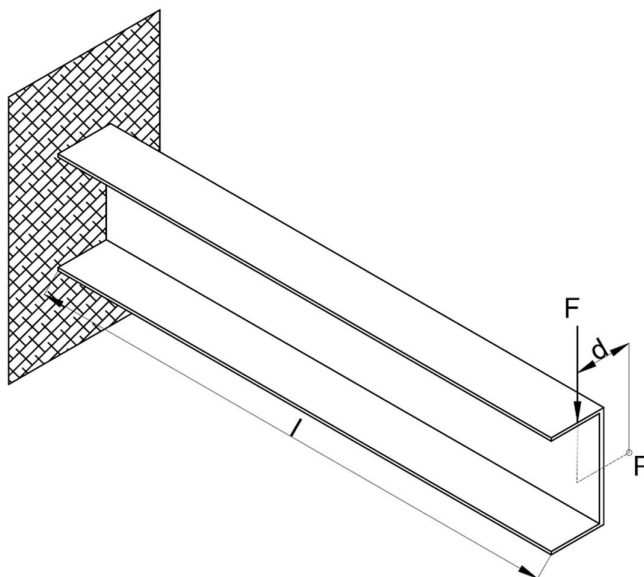
$$I_{\omega} = \int_A \omega^2 dA = t \int_A \omega \cdot \omega \cdot ds \quad (2.12)$$

Torzijski moment tromosti računa se prema:

$$I_t = \frac{1}{3} \sum s_i t_i^3 \quad (2.13)$$

### 3. Diferencijalne jednadžbe savijanja i uvijanja konzolnog nosača

U ovom poglavlju će biti dano rješenje diferencijalne jednadžbe savijanja i uvijanja za tankostjeni štap otvorenog poprečnog presjeka prikazan na slici 3.1.



Slika 3.1 – Tankostjeni štap otvorenog poprečnog presjeka

#### 3.1. Diferencijalna jednadžba savijanja elastične linije konzolnog nosača

Integriranjem jednadžbe elastične linije konzolnog nosača (3.1) dobije se progib  $w(x)$  u bilo kojoj točki nosača.

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{M_{y0}}{E \cdot I_y} \quad (3.1)$$

Funkcija momenta savijanja glasi:

$$M_{y0} = M_{y0}(x)$$

$$M_{y0} = -F \cdot (l - x)$$

Uvrštavanjem izraza za moment savijanja dobije se diferencijalna jednadžba:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{F}{E \cdot I_y} (l - x)$$



Postupkom integriranja dođe se do slijedećeg izraza:

$$\frac{dw}{dx} = \frac{F}{E \cdot I_y} \left( l \cdot x - \frac{x^2}{2} + C_1 \right),$$

$$w = \frac{F}{E \cdot I_y} \left( l \cdot x - \frac{x^3}{6} + C_1 \cdot x + C_2 \right)$$

pri čemu se integracijske konstante mogu dobiti iz rubnih uvjeta koji glase:

$$w(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$\beta(0) = (-dw/dx)_0 = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

vraćanjem konstanti integracije u izraz za  $w$  dobije se funkcija progiba:

$$w = \frac{F}{E \cdot I_y} \left( l \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right)$$

sređivanjem jednadžbe dođe se do konačnog izraza za progib:

$$w_s = \frac{F \cdot x^2}{6 \cdot E \cdot I_{yo}} \cdot (3 \cdot l - x) \quad (3.2)$$

### 3.2. Diferencijalna jednadžba uvijanja konzolnog nosača oko pola

Kut uvijanja se računa pomoću diferencijalne jednadžbe uvijanja konzolnog nosača oko pola.

$$\frac{d^4 \alpha}{dx^4} - \frac{k^2}{l^2} \cdot \frac{d^2 \alpha}{dx^2} = \frac{1}{E \cdot I_\omega} \cdot \left( m_p + \frac{db}{dx} \right)$$

Sila se nalazi na slobodnom kraju štapa te je desna strana navedene jednadžbe jednaka nuli.

$$\frac{d^4 \alpha}{dx^4} - \frac{k^2}{l^2} \cdot \frac{d^2 \alpha}{dx^2} = 0$$

gdje je:

$$k = l \cdot \sqrt{\frac{G \cdot I_t}{E \cdot I_\omega}} \quad (3.3)$$

opće rješenje diferencijalne jednadžbe glasi:

$$\alpha = C_0 + C_1 \cdot x + C_2 \cdot \operatorname{sh} \frac{k}{l} x + C_3 \cdot \operatorname{ch} \frac{k}{l} x$$

pri čemu se integracijske konstante mogu dobiti iz rubnih uvjeta:

$$\alpha(0) = 0; \quad \frac{d\alpha}{dx}(0) = 0; \quad B(l) = -EI_{\omega} \frac{d^2\alpha}{dx^2} = 0; \quad M(l) = M_{\omega} + M_t$$

vraćanjem konstanta integracije u izraz za  $\alpha$  dobije se funkcija kuta uvijanja:

$$\alpha = \frac{M_t \cdot l^3}{E \cdot I_{\omega} \cdot k^2} \cdot \left[ \frac{x}{l} - \frac{1}{k} \cdot \operatorname{sh} k \frac{x}{l} - \frac{\operatorname{th} k}{k} \left( 1 - \operatorname{ch} k \frac{x}{l} \right) \right] \quad (3.4)$$

progib od uvijanja računa se prema:

$$w_U = \alpha \cdot (|\Delta y| + y_t) \quad (3.5)$$

izraz za ukupni progib nosača glasi:

$$w = w_S + w_U \quad (3.6)$$

sređivanjem izraza za kut uvijanja dobije se funkcija bimomenta koja glasi:

$$B(x) = -EI_{\omega} \frac{d^2\alpha(x)}{dx^2}$$

$$B = -\frac{M_t \cdot l}{k} \cdot \left[ \operatorname{th} k \cdot \operatorname{ch} \left( k \cdot \frac{x}{l} \right) - \operatorname{sh} \left( k \cdot \frac{x}{l} \right) \right] \quad (3.7)$$

## 4. Izrazi za naprezanje

U ovom poglavlju biti će prikazani izrazi za naprezanje konzolnog nosača.

Moment savijanja oko osi  $y$  računa se prema:

$$M_{y0} = -F \cdot l \quad (4.1)$$

Izraz za moment torzije oko glavnog pola glasi:

$$M_t = F \cdot d = F \cdot (y_t + |\Delta y|) \quad (4.2)$$

Naprezanja u karakterističnim točkama od momenta savijanja  $M_{y0}$  računaju se prema:

$$\sigma_s = \frac{M_{y0}}{I_{y0}} \cdot z_0 \quad (4.3)$$

Izraz za naprezanja u karakterističnim točkama od bimomenta  $B$  glasi:

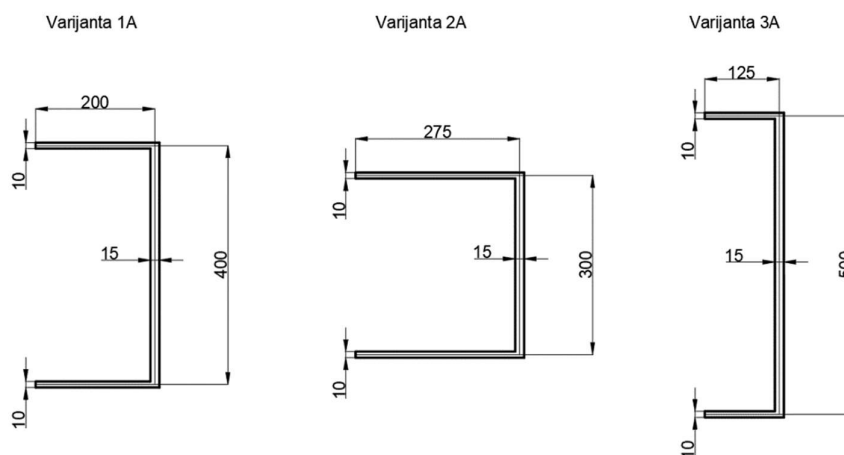
$$\sigma_u = \frac{B}{I_\omega} \cdot \omega \quad (4.4)$$

Ukupna naprezanja u karakterističnim točkama računaju se prema:

$$\sigma = \sum \sigma_s + \sigma_u \quad (4.5)$$

## 5. Uvijanje tankostjenog štapa s poprečnim presjekom prema slici

Kao što je navedeno u prethodnom poglavlju svaki od primjera će se računati u 3 varijante (slika 5.1) gdje će se mijenjati dužine stranica uz uvjet da površina poprečnog presjeka bude konstanta. Proračun će se vršiti samo za jednu varijantu dok će ostale varijante biti izračunate pomoću Excel dokumenta te prikazane grafički i tablično kako bi se mogli usporediti rezultati.

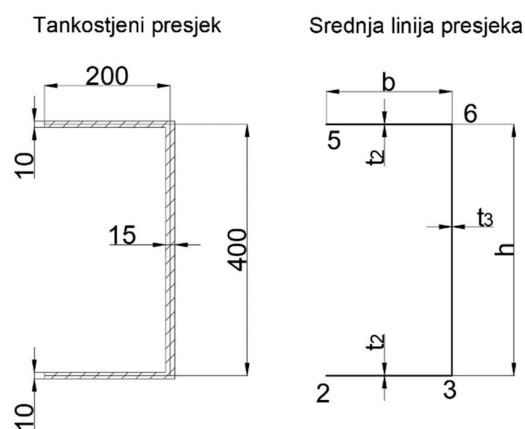


Slika 5.1 - Varijante primjera A

### 5.1. Uvijanje tankostjenog štapa varijanta 1A

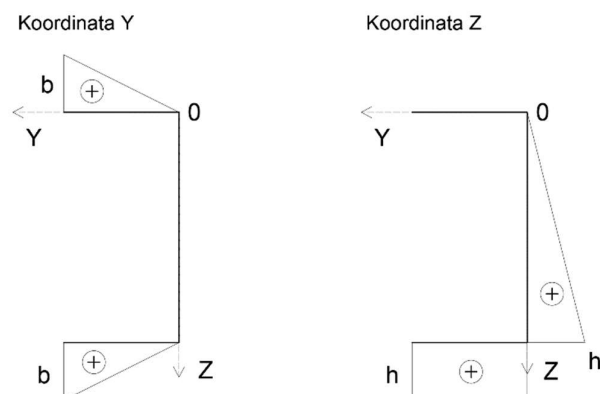
Zadane su slijedeće vrijednosti:

$$t_2 = 10 \text{ mm}, t_3 = 15 \text{ mm}, b = 200 \text{ mm}, h = 400 \text{ mm}$$



Slika 5.2 - Presjek tankostjenog štapa i srednja linija presjeka

Slika 5.3 prikazuje raspodjelu y i z koordinata na presjeku tankostjenog štapa. Kako je zadani poprečni presjek simetričan u odnosu na os z čija koordinata težišta iznosi 200 mm u slijedećem dijelu proračuna izračunati će se samo koordinata težišta y osi.



Slika 5.3 - Dijagram y i z koordinata

### 5.1.1. Proračun geometrijskih karakteristika

Površina poprečnog presjeka iznosi:

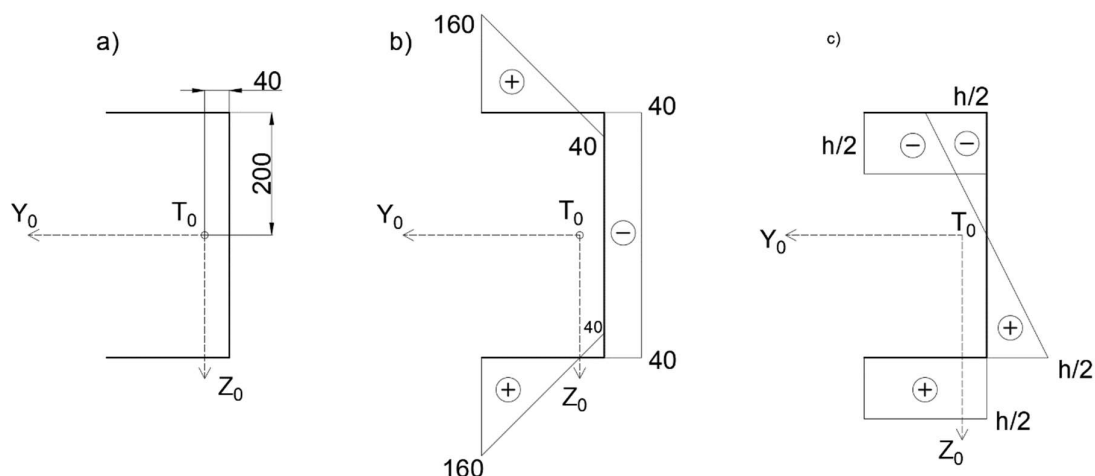
$$A = 2 \cdot b \cdot t_2 + h \cdot t_3 = 2 \cdot 200 \cdot 10 + 400 \cdot 15 = 1 \cdot 10^4 \text{ mm}^2$$

$S'_z$  i je izračunat prema (2.2) primjenom Vereščaginovog pravila:

$$S'_z = 10 \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot 200 \cdot 200 \cdot 1 \right) = 4 \cdot 10^5 \text{ mm}^3$$

Koordinata težišta izračunata je prema izrazu (2.1) te iznosi:

$$y'_T = \frac{4 \cdot 10^5}{1 \cdot 10^4} = 40 \text{ mm}$$

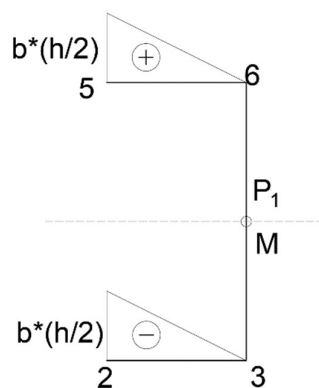


Slika 5.4 - a) koordinate težišta, b) glavna koordinata y, c) glavna koordinata z

Glavni moment tromosti s obzirom na težišne osi  $y_0$  i  $z_0$  izračunat prema (2.3) primjenom Vereščaginovog pravila:

$$I_{y_0} = 10 \cdot \left[ (200 \cdot 200 \cdot 200) + (200 \cdot (-200) \cdot (-200)) \right] + 15 \cdot \left[ \left( \frac{1}{2} \cdot (-200) \cdot 200 \cdot \frac{2}{3} \cdot (-200) \right) + \left( \frac{1}{2} \cdot 200 \cdot 200 \cdot \frac{2}{3} \cdot 200 \right) \right] = 240 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

Kako bi se došlo do položaja glavnog pola potrebno je postaviti pomoćni pol  $P_1$  te izračunati sektorsku koordinatu  $\omega'$  prikazanu na slici 5.5.



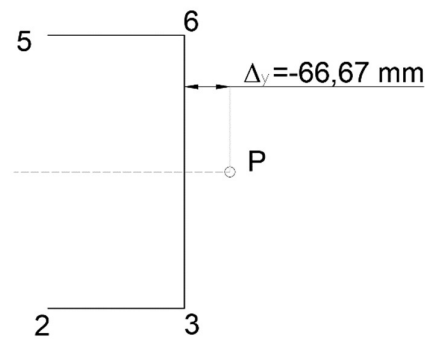
Slika 5.5 - Sektorska koordinata  $\omega'$

Sektorski devijacijski moment tromosti izračunat je prema (2.4) primjenom Vereščaginovog pravila:

$$I_{y\omega 1} = 2 \cdot 10 \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot 200 \cdot \left( -\frac{400}{2} \cdot 200 \right) \cdot 200 \right] = -160 \cdot 10^8 \text{ mm}^4$$

Položaj glavnog pola prema (2.5) iznosi:

$$\Delta_y = \frac{-160 \cdot 10^8}{240 \cdot 10^6} = -66,67 \text{ mm}$$



Slika 5.6 - Položaj glavnog pola

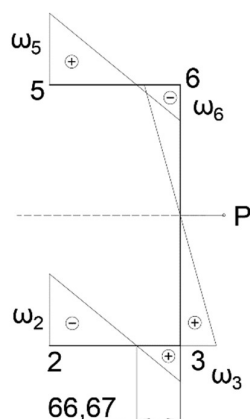
Vrijednosti glavne sektorske koordinate u karakterističnim točkama izračunate su prema (2.7, 2.8, 2.10, 2.11):

$$\omega_2 = 13333,33 - \frac{400}{2} \cdot 200 = -26666,66 \text{ mm}^2$$

$$\omega_5 = 26666,66 \text{ mm}^2$$

$$\omega_6 = -133333,33 \text{ mm}^2$$

te je prikazana na slici 5.7



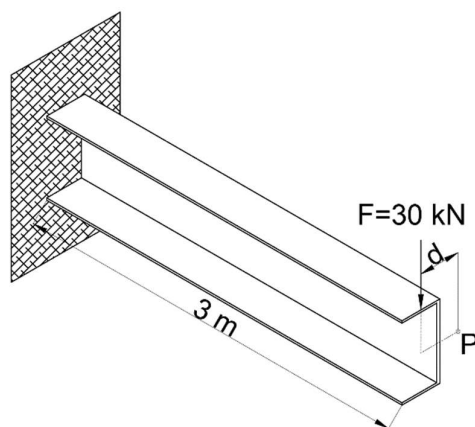
Slika 5.7 - Raspodjela glavne sektorske koordinate  $\omega$

Glavni sektorski moment tromosti izračunat je prema (2.12) primjenom Vereščaginovog pravila:

$$I_{\omega} = 2 \cdot 10 \cdot \left[ \left( \frac{1}{2} \cdot 133,33 \cdot 26666,66 \cdot \frac{2}{3} \cdot 26666,66 \right) + \left( \frac{1}{2} \cdot 66,66 \cdot 13333,33 \cdot \frac{2}{3} \cdot 13333,33 \right) \right] + 15 \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot 200 \cdot 13333,33 \cdot \frac{2}{3} \cdot 13333,33 \right) = 1,066 \cdot 10^{12} \text{ mm}^6$$

### 5.1.2. Proračun unutarnjih sila

Proračun unutarnjih sila vrši se za konzolni nosač, sila djeluje na slobodnom kraju te prolazi težištem štap (slika 5.8).



Slika 5.8 – Tankostjeni štap opterećen koncentriranom silom  $F$



Moment savijanja oko osi  $y$  prema izrazu (4.1) iznosi:

$$M_{y_0} = -30000 \cdot 3000 = -9 \cdot 10^7 \text{ Nmm}$$

Moment torzije izračunat je prema (4.2):

$$M_t = 30000 \cdot (40 + 66,67) = 3,2 \cdot 10^6 \text{ Nmm}$$

Prema izrazu (2.13) torzijski moment tromosti iznosi:

$$I_t = \frac{1}{3} \cdot (2 \cdot 200 \cdot 10^3 + 400 \cdot 15^3) = 583333 \text{ mm}^4$$

Koeficijent  $k$  prema izrazu (3.3):

$$k = 3000 \cdot \sqrt{\frac{80769 \cdot 583333}{210 \cdot 10^3 \cdot 1,0666 \cdot 10^{12}}} = 1,37587$$

Bimoment se računa prema izrazu (3.7) koji glasi:

$$B = -\frac{M_t \cdot l}{k} \cdot \left[ \text{th}k \cdot \text{ch} \left( k \cdot \frac{x}{l} \right) - \text{sh} \left( k \cdot \frac{x}{l} \right) \right] \quad (3.7)$$

uvrštavanjem u izraz (3.7) dobiju se vrijednosti bimomenta za karakteristične točke:

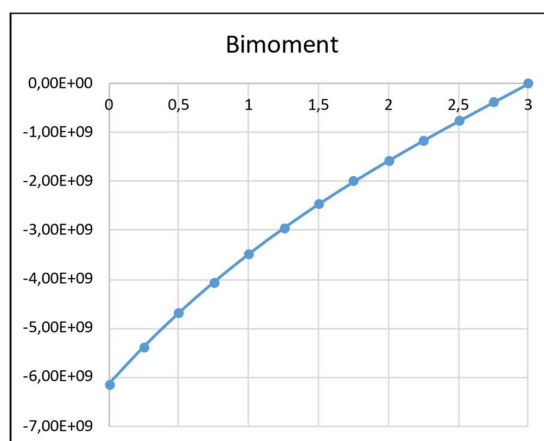
$$B(0) = -\frac{3,2 \cdot 10^6 \cdot 3000}{1,37587} \cdot \left[ \text{th}1,37587 \cdot \text{ch} \left( 1,37587 \cdot \frac{0}{3000} \right) + \text{sh} \left( 1,37587 \cdot \frac{0}{3000} \right) \right] =$$

$$B(0) = -6,14 \cdot 10^9 \text{ Nmm}^2$$

$$B(3) = -\frac{3,2 \cdot 10^6 \cdot 3000}{1,37587} \cdot \left[ \text{th}1,37587 \cdot \text{ch} \left( 1,37587 \cdot \frac{3000}{3000} \right) + \text{sh} \left( 1,37587 \cdot \frac{3000}{3000} \right) \right] =$$

$$B(3) = 0 \text{ Nmm}^2$$

Raspodjela bimomenta po dužini konzolnog nosača prikazana je dijagramom (slika 5.9).



Slika 5.9 - Dijagram bimomenta B

### 5.1.3. Proračun naprezanja u karakterističnim točkama

Naprezanja u karakterističnim točkama od momenta savijanja  $M_{y0}$  računaju se prema (4.3) te iznose:

$$\sigma_{s2} = \frac{-9 \cdot 10^7}{2,4 \cdot 10^8} \cdot 200 = -75 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{s3} = \frac{-9 \cdot 10^7}{2,4 \cdot 10^8} \cdot 200 = -75 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{s5} = \frac{-9 \cdot 10^7}{2,4 \cdot 10^8} \cdot (-200) = 75 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{s6} = \frac{-9 \cdot 10^7}{2,4 \cdot 10^8} \cdot (-200) = 75 \text{ MPa}$$

Naprezanja u karakterističnim točkama od bimomenta B prema izrazu (4.4) iznose:

$$\sigma_{U2} = \frac{-6,14 \cdot 10^9}{1,0666 \cdot 10^{12}} \cdot (-26666,67) = 153,51 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{U3} = \frac{-6,14 \cdot 10^9}{1,0666 \cdot 10^{12}} \cdot 13333,33 = -76,75 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{U5} = \frac{-6,14 \cdot 10^9}{1,0666 \cdot 10^{12}} \cdot 26666,67 = -153,51 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{U6} = \frac{-6,14 \cdot 10^9}{1,0666 \cdot 10^{12}} \cdot (-13333,33) = 76,75 \text{ MPa}$$

Ukupna naprezanja u karakterističnim točkama izračunata su prema (4.5):

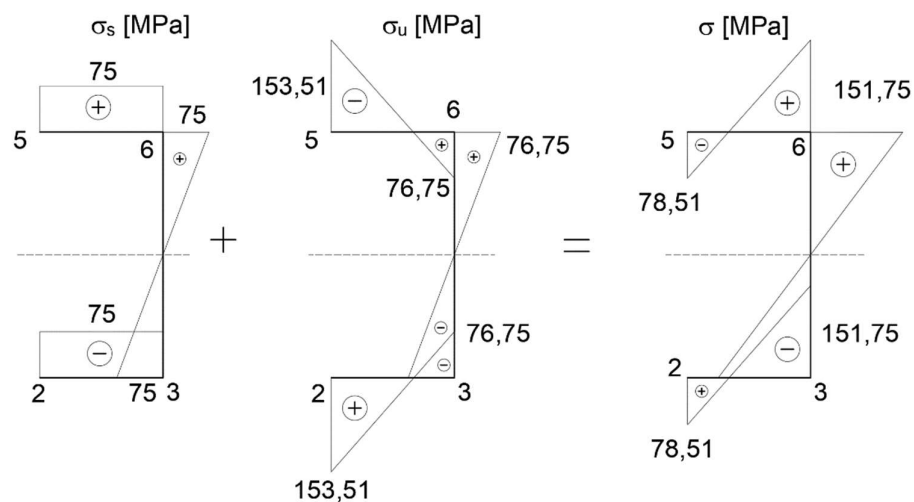
$$\sigma_2 = -75 + 153,51 = 78,51 \text{ MPa}$$

$$\sigma_3 = -75 - 76,75 = -151,75 \text{ MPa}$$

$$\sigma_5 = 75 - 153,51 = -78,51 \text{ MPa}$$

$$\sigma_6 = 75 + 76,75 = 151,75 \text{ MPa}$$

Raspodjela naprezanja u karakterističnim točkama prikazana je dijagramom (slika 5.10):



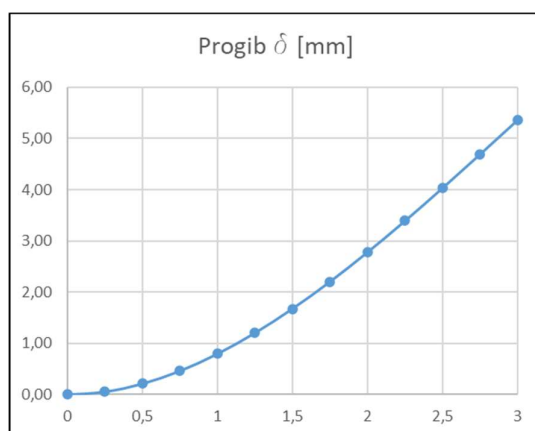
Slika 5.10 - Naprezanja u karakterističnim točkama

#### 5.1.4. Progib tankostjenog štapa

Progib štapa računa se pomoću diferencijalne jednadžbe savijanja elastične linije konzolnog nosača prema (3.2).

$$w_s(3) = \frac{30000 \cdot 3000^2}{6 \cdot 210 \cdot 10^3 \cdot 2,4 \cdot 10^8} \cdot (3 \cdot 3000 - 3000) = 5,36 \text{ mm}$$

Funkcija progiba po dužini konzolnog nosača prikazana je dijagramom (slika 5.11):



Slika 5.11 - Progib tankostjenog štapa

Funkcija kuta uvijanja prikazana je pomoću diferencijalne jednadžbe uvijanja konzolnog nosača oko pola prema (3.4) koja glasi:

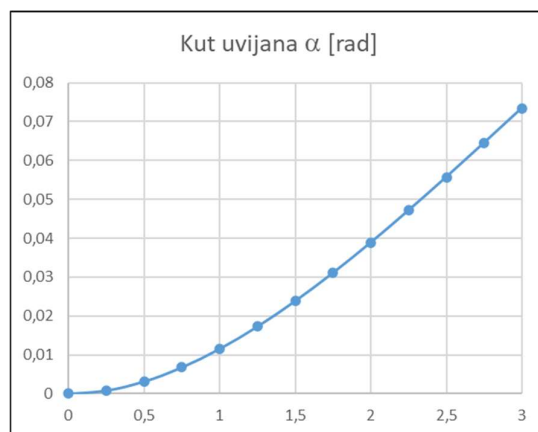
$$\alpha = \frac{M_t \cdot l^3}{E \cdot I_\omega \cdot k^2} \cdot \left[ \frac{x}{l} - \frac{1}{k} \cdot \operatorname{sh} k \frac{x}{l} - \frac{\operatorname{th} k}{k} \left( 1 - \operatorname{ch} k \frac{x}{l} \right) \right] \quad (3.4)$$

Uvrštavanjem u izraz (3.4) dobije se funkcija kuta uvijanja:

$$\alpha = \frac{3,2 \cdot 10^6 \cdot 3000^3}{210 \cdot 10^3 \cdot 1,0667 \cdot 10^{12} \cdot 1,3758^2} \cdot \left[ \frac{3000}{3000} - \frac{1}{1,3758} \cdot \operatorname{sh} \left( 1,3758 \cdot \frac{3000}{3000} \right) - \frac{\operatorname{th} 1,3758}{1,3758} \left( 1 - \operatorname{ch} \left( 1,3758 \cdot \frac{3000}{3000} \right) \right) \right]$$

$$\alpha = 0,07343 \text{ rad}$$

Funkcija kuta uvijanja po dužini konzolnog nosača prikaza je dijagramom (slika 5.12):



Slika 5.12 - Kut uvijanja tankostjenog štapa

Progib od uvijanja računa se prema (3.5):

$$w_U(3) = 0,07343 \cdot (66,67 + 40) = 7,832 \text{ mm}$$

Ukupni progib štapa od savijanja i uvijanja na slobodnom kraju štapa prema (3.6) iznosi:

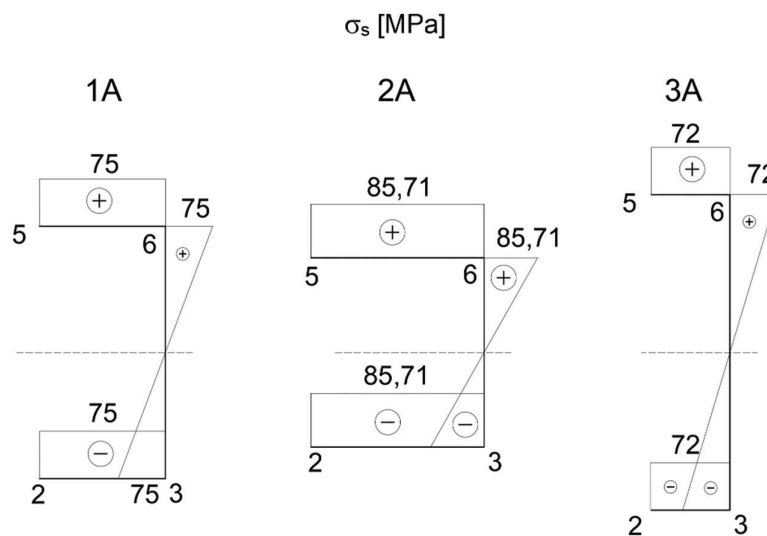
$$w = 5,36 + 7,832 = 13,192 \text{ mm}$$

## 5.2. Grafički prikaz naprezanja varijanti 1A, 2A i 3A

U ovom poglavlju biti će prikazani dijagrami naprezanja i deformacije varijanti kako bi se moglo usporediti kako promjene dužina stranica tankostjenog štapa, uz konstantu površinu poprečnog presjeka utječu na ponašanje profila.

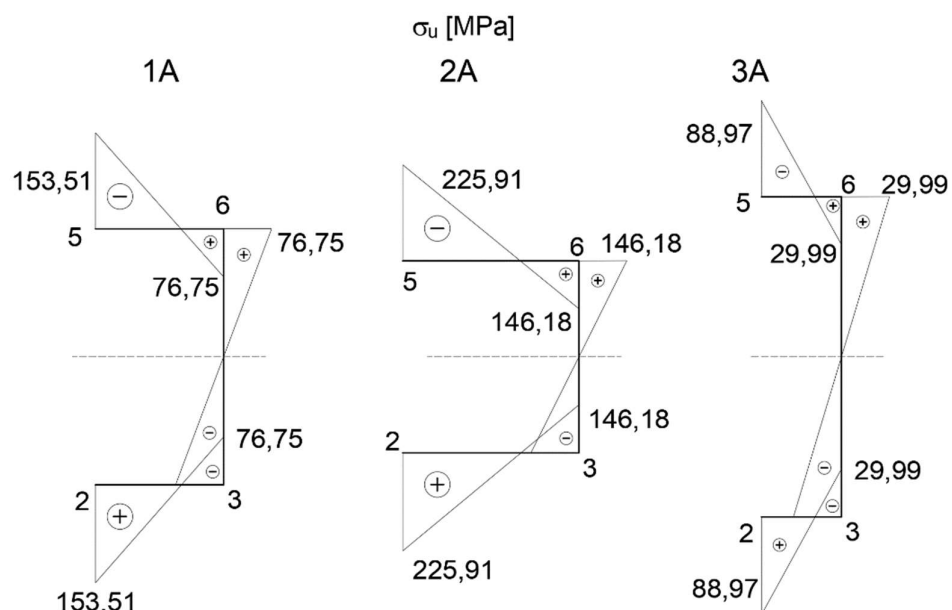
### 5.2.1. Grafički prikaz naprezanja u karakterističnim točkama

Naprezanja u karakterističnim točkama od momenta savijanja  $M_{y0}$  za varijante 1A, 2A i 3A prikazana su dijagramom (slika 5.13).

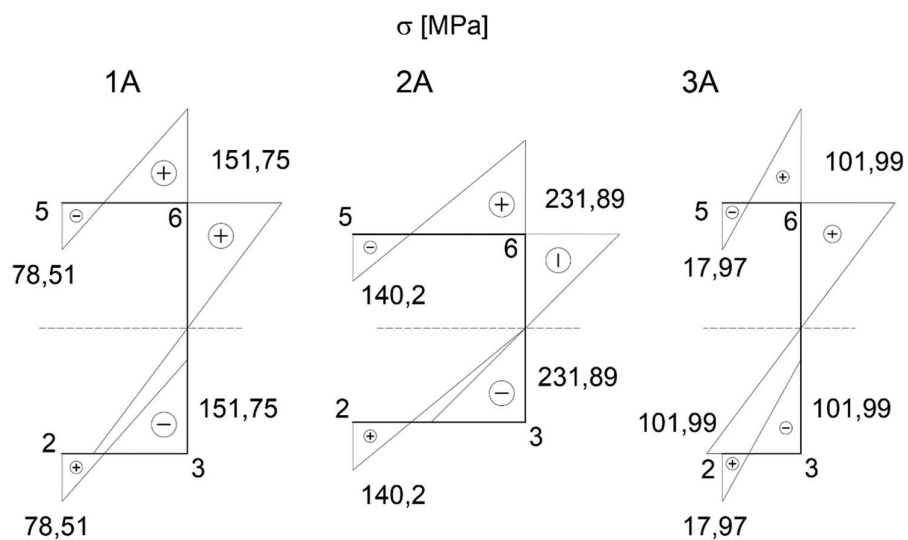


Slika 5.13 – Dijagram naprezanja od momenta savijanja  $M_{y0}$

Naprezanja u karakterističnim točkama od bimomenta  $B$  prikazana su dijagramom (slika 5.14).

Slika 5.14 – Dijagram naprezanja od bimomenta  $B$ 

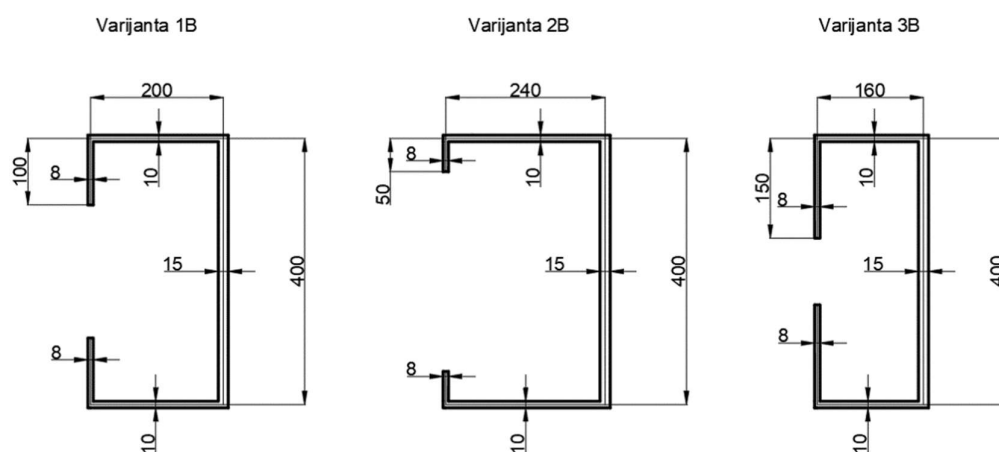
Ukupna naprezanja u karakterističnim točkama dana su dijagramom (slika 5.15).

Slika 5.15 – Dijagram ukupnih naprezanja  $M_{y0} + B$ 

Cjelokupni proračun i dijagrami svih varijanti primjera A dani su u priložima 1, 2 i 3.

## 6. Uvijanje tankostjenog štapa s poprečnim presjekom prema slici

Primjer B također će se prikazati u 3 varijante (slika 6.1) gdje će se mijenjati dužine stranica uz uvjet da površina poprečnog presjeka bude konstantna. Proračun će se vršiti samo za varijantu 1B dok će ostale biti prikazane grafički i tablično pomoću Excel dokumenta.



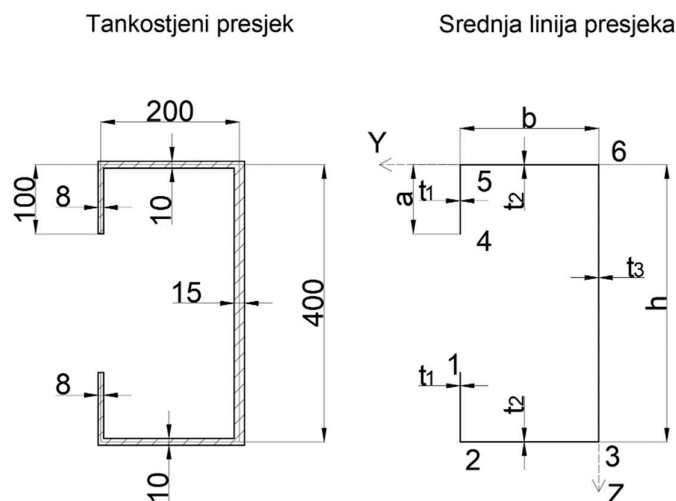
Slika 6.1 - Varijante primjera B

### 6.1. Uvijanje tankostjenog štapa varijanta 1B

Zadane su slijedeće vrijednosti:

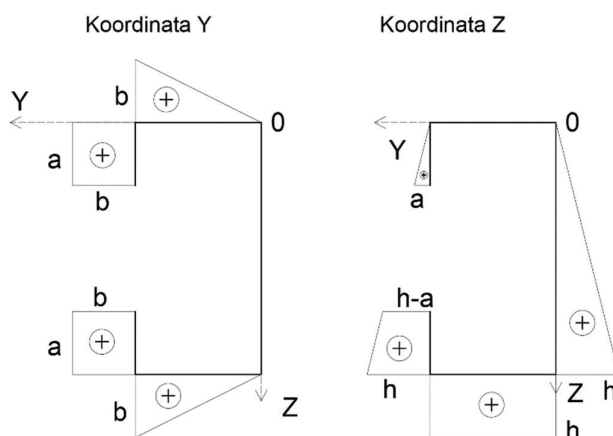
$$t_1 = 8 \text{ mm}, t_2 = 10 \text{ mm}, t_3 = 15 \text{ mm}, a = 100 \text{ mm}, b = 200 \text{ mm}, h = 400 \text{ mm}$$

$$E = 210\,000 \text{ GPa}, G = 80\,769 \text{ GPa}$$



Slika 6.2 – Poprečni presjek štapa i srednja linija presjeka

Slika 6.3 prikazuje raspodjelu y i z koordinata na presjeku tankostjenog štapa. Kako je zadani poprečni presjek simetričan u odnosu na os z čija koordinata težišta iznosi 200 mm u slijedećem dijelu proračuna izračunati će se samo koordinata težišta y osi.



Slika 6.3 - Dijagram y i z koordinata

### 6.1.1. Proračun geometrijskih karakteristika

Površina poprečnog presjeka iznosi:

$$A = 2 \cdot a \cdot t_1 + 2 \cdot b \cdot t_2 + h \cdot t_3 = 2 \cdot 100 \cdot 8 + 2 \cdot 200 \cdot 10 + 400 \cdot 15 = 11600 \text{ mm}^2$$

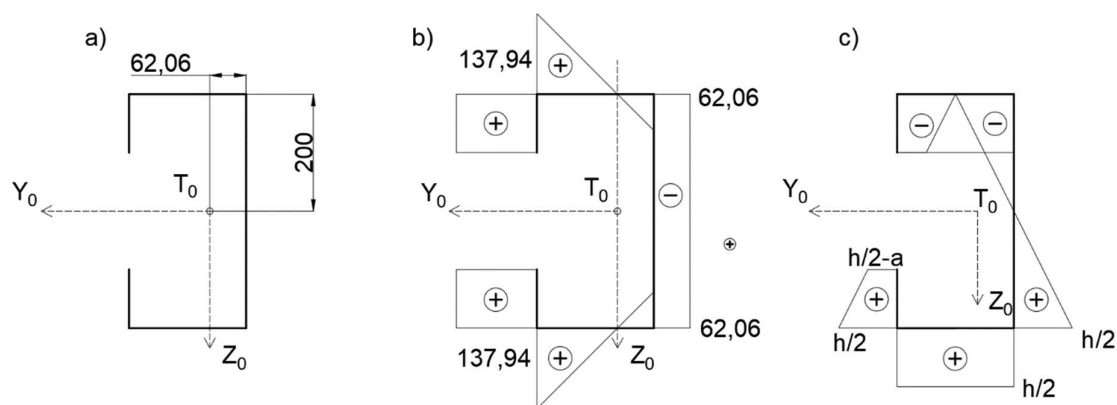
$S'_z$  je izračunat prema (2.2) primjenom Vereščaginovog pravila:



$$S'_z = 2 \cdot 8(100 \cdot 200 \cdot 1) + 2 \cdot 10 \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot 200 \cdot 200 \cdot 1 \right) = 720\,000 \text{ mm}^3$$

Koordinata težišta izračunata prema izrazu (2.1) te iznosi:

$$y'_T = \frac{720000}{11600} = 62,06 \text{ mm}$$

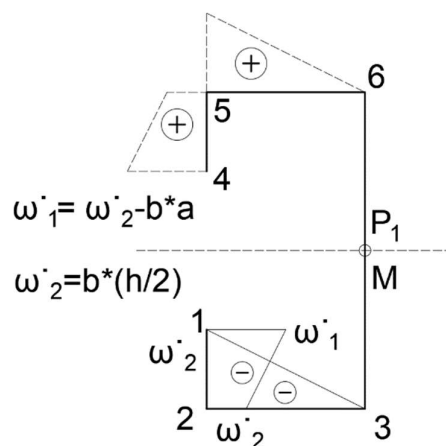


Slika 6.4 - a) koordinate težišta, b) glavna koordinata y, c) glavna koordinata z

Glavni moment tromosti s obzirom na težišnu os  $y_0$  izračunat je prema (2.3) primjenom Vereščaginovog pravila:

$$I_{y_0} = 2 \cdot 8 \cdot \left[ \frac{100}{3} \cdot \left( \frac{400}{4} \right)^2 + \left( \frac{400}{4} \right)^2 + \frac{400}{4} \cdot \frac{400}{4} \right] + 2 \cdot 10 \cdot 200 \cdot \frac{400}{2} \cdot \frac{400}{2} + 2 \cdot 15 \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{400}{2} \cdot \frac{400}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{400}{2} \right) = 2,77 \cdot 10^8 \text{ mm}^4$$

Kako bi se došlo do položaja glavnog pola potrebno je postaviti pomoćni pol  $P_1$  te izračunati sektorsku koordinatu  $\omega$  prikazanu na slici 6.5.

Slika 6.5 - Sektorska koordinata  $\omega'$ 

Sektorski devijacijski moment tromosti izračunat je prema (2.4) primjenom Vereščaginovog pravila:

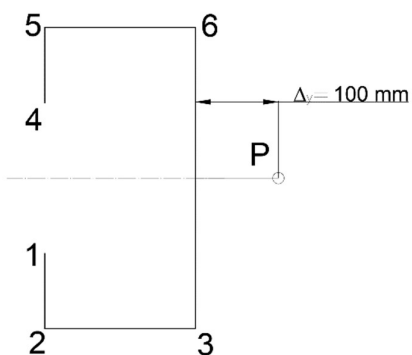
$$I_{y\omega 11} = 2 \cdot 10 \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot 200 \cdot \left( -40000 \cdot \frac{400}{2} \right) \right] = -1,6 \cdot 10^{10} \text{ mm}^4$$

$$I_{y\omega 12} = 2 \cdot 8 \cdot \left[ \frac{100}{6} \cdot \left( 2 \cdot (200 - 100 \cdot (-60000)) + 2 \cdot (200 \cdot (-40000)) + \right) \right. \\ \left. + (200 - 100) \cdot (-40000) + \frac{400}{2} \cdot (-60000) \right] = -1,173 \cdot 10^{10} \text{ mm}^4$$

$$I_{y\omega 1} = I_{y\omega 11} + I_{y\omega 12} = -2,773 \cdot 10^{10} \text{ mm}^4$$

Položaj glavnog pola prema (2.5) iznosi:

$$\Delta_y = \frac{-2,773 \cdot 10^{10}}{2,77 \cdot 10^8} = -100 \text{ mm}$$



Slika 6.6 - Položaj glavnog pola

Vrijednosti glavne sektorske koordinate u karakterističnim točkama izračunate su prema (2.7-2.11):

$$\omega_3 = 100 \cdot \frac{400}{2} = 20000 \text{ mm}^2$$

$$\omega_2 = 20000 - \frac{400}{2} \cdot 200 = -20000 \text{ mm}^2$$

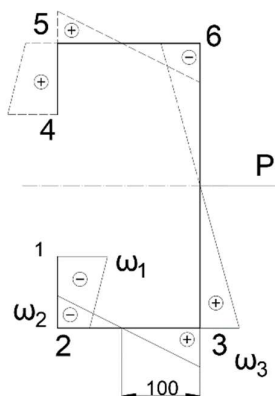
$$\omega_1 = -20000 - (100 + 200) \cdot 100 = -50000 \text{ mm}^2$$

$$\omega_4 = 50000 \text{ mm}^2$$

$$\omega_5 = 20000 \text{ mm}^2$$

$$\omega_6 = 20000 \text{ mm}^2$$

te je prikazana na slici 6.7



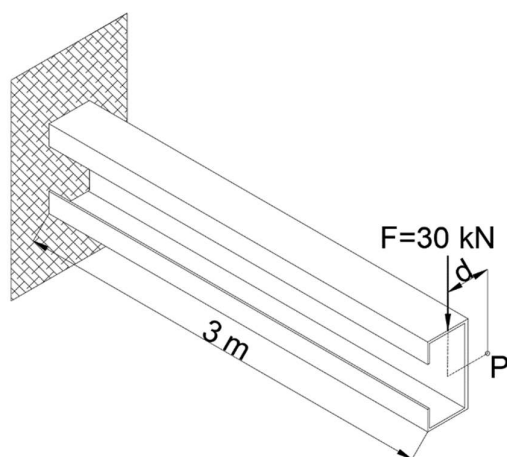
Slika 6.7 - Raspodjela glavne sektorske koordinate

Glavni sektorski moment tromosti izračunat je prema (2.12) primjenom Vereščaginovog pravila:

$$\begin{aligned}
 I_{\omega} &= 2 \cdot 8 \cdot \left[ \frac{100}{3} \cdot \left( (-50000)^2 + (-20000)^2 + (-50000) \cdot (-20000) \right) \right] + \\
 &+ 2 \cdot 10 \cdot \left[ \left( \frac{1}{2} \cdot (200 - 100) \cdot (-20000) \cdot \frac{2}{3} \cdot (-20000) \right) + \left( \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 20000 \cdot \frac{2}{3} \cdot 20000 \right) \right] + \\
 &+ 2 \cdot 15 \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{400}{200} \cdot 20000 \cdot \frac{2}{3} \cdot 20000 \right) = \\
 I_{\omega} &= 3,4133 \cdot 10^{12} \text{ mm}^6
 \end{aligned}$$

### 6.1.2. Proračun unutarnjih sila

Proračun unutarnjih sila vrši se za konzolni nosač, sila djeluje na slobodnom kraju te prolazi težištem štapa.



Slika 6.8 – Tankostjeni štap opterećen koncentriranom silom  $F$

Moment savijanja oko osi  $y$  prema izrazu (4.1) iznosi:

$$M_{y_0} = -30000 \cdot 3000 = -9 \cdot 10^7 \text{ Nmm}$$

Moment torzije izračunat je prema (4.2):

$$M_t = 30000 \cdot (62,07 + 100) = 4\,862\,068 \text{ Nmm}$$

Prema izrazu (4.3) torzijski moment tromosti iznosi:

$$I_t = \frac{1}{3} \cdot (2 \cdot 100 \cdot 8^3 + 2 \cdot 200 \cdot 10^3 + 400 \cdot 15^3) = 617466 \text{ mm}^4$$

Koeficijent  $k$  izračunat je prema (3.3):

$$k = 3000 \cdot \sqrt{\frac{80769 \cdot 617466}{210000 \cdot 3,4133 \cdot 10^{12}}} = 0,791318$$

Bimoment se računa prema (3.7) koji glasi:

$$B = -\frac{M_t \cdot l}{k} \cdot \left[ \text{th}k \cdot \text{ch}\left(k \cdot \frac{x}{l}\right) - \text{sh}\left(k \cdot \frac{x}{l}\right) \right] \quad (3.7)$$

Uvrštavanjem u izraz (3.7) dobiju vrijednosti bimomenta za karakteristične točke:

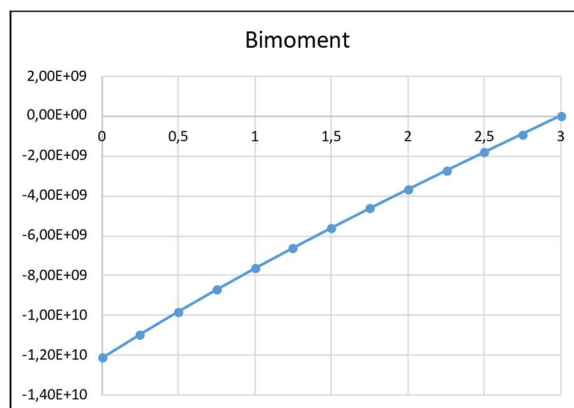
$$B(0) = -\frac{4862068 \cdot 3000}{0,791318} \cdot \left[ \text{th}0,791318 \cdot \text{ch}\left(0,791318 \cdot \frac{0}{3000}\right) + \text{sh}\left(0,791318 \cdot \frac{0}{3000}\right) \right] =$$

$$B(0) = -1,22 \cdot 10^{10} \text{ Nmm}^2$$

$$B(3) = -\frac{4862068 \cdot 3000}{0,791318} \cdot \left[ \text{th}0,791318 \cdot \text{ch}\left(0,791318 \cdot \frac{3000}{3000}\right) + \text{sh}\left(0,791318 \cdot \frac{3000}{3000}\right) \right] =$$

$$B(3) = 0 \text{ Nmm}^2$$

Raspodjela bimomenta po dužini konzolnog nosača prikazana je dijagramom (slika 5.9).



Slika 6.9 - Dijagram bimomenta  $B$

### 6.1.1. Proračun naprezanja u karakterističnim točkama

Naprezanja u karakterističnim točkama od momenta savijanja  $M_{y0}$  računaju se prema (4.3) te iznose:

$$\sigma_{s1} = \frac{-9 \cdot 10^7}{2,77 \cdot 10^8} \cdot 100 = -32,45 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{s2} = \frac{-9 \cdot 10^7}{2,77 \cdot 10^8} \cdot 200 = -64,9 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{s3} = \frac{-9 \cdot 10^7}{2,77 \cdot 10^8} \cdot 200 = -64,9 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{s4} = \frac{-9 \cdot 10^7}{2,77 \cdot 10^8} \cdot (-100) = 32,45 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{s5} = \frac{-9 \cdot 10^7}{2,77 \cdot 10^8} \cdot (-200) = 64,9 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{s6} = \frac{-9 \cdot 10^7}{2,77 \cdot 10^8} \cdot (-200) = 64,9 \text{ MPa}$$

Naprezanja u karakterističnim točkama od bimomenta B prema izrazu (4.4) iznose:

$$\sigma_{U1} = \frac{-1,22 \cdot 10^{10}}{3,4133 \cdot 10^{12}} \cdot (-50000) = 177,98 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{U2} = \frac{-1,22 \cdot 10^{10}}{3,4133 \cdot 10^{12}} \cdot (-20000) = 71,19 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{U3} = \frac{-1,22 \cdot 10^{10}}{3,4133 \cdot 10^{12}} \cdot 20000 = -71,19 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{U4} = \frac{-1,22 \cdot 10^{10}}{3,4133 \cdot 10^{12}} \cdot 50000 = -177,98 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{U5} = \frac{-1,22 \cdot 10^{10}}{3,4133 \cdot 10^{12}} \cdot 20000 = -71,19 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{U6} = \frac{-1,22 \cdot 10^{10}}{3,4133 \cdot 10^{12}} \cdot (-20000) = 71,19 \text{ MPa}$$

Ukupna naprezanja u karakterističnim točkama izračunata su prema (4.5):

$$\sigma_1 = -32,45 + 177,98 = 145,53 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = -64,9 + 71,19 = 6,29 \text{ MPa}$$

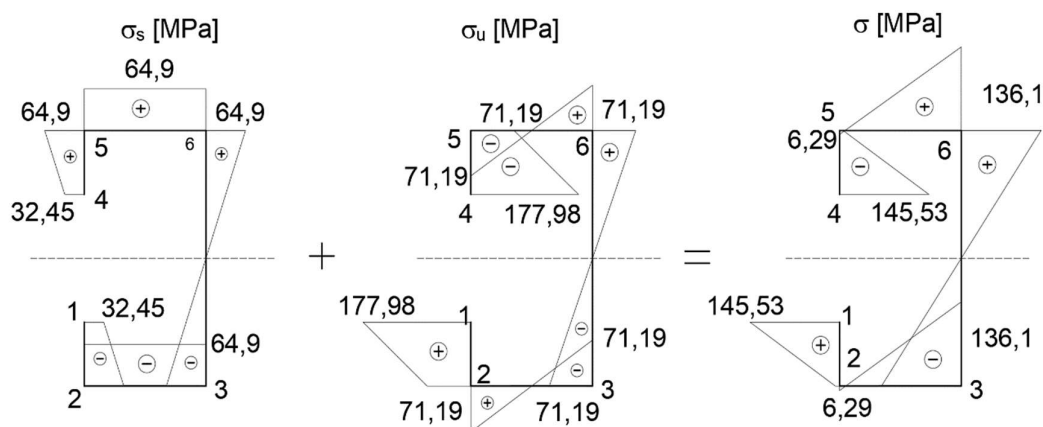
$$\sigma_3 = -64,9 - 71,19 = -136,1 \text{ MPa}$$

$$\sigma_4 = 32,45 - 177,98 = -145,53 \text{ MPa}$$

$$\sigma_5 = 64,9 - 71,19 = -6,29 \text{ MPa}$$

$$\sigma_6 = 64,9 + 71,19 = 136,1 \text{ MPa}$$

Raspodjela naprezanja u karakterističnim točkama prikazana je dijagramom (slika 6.10):



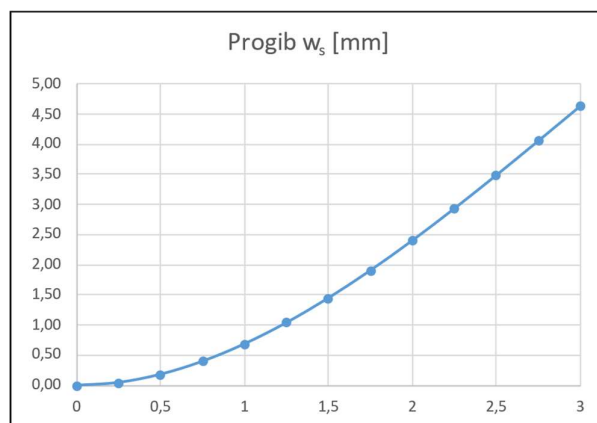
Slika 6.10 - Naprezanja u karakterističnim točkama

### 6.1.1. Progib tankostjenog štapa

Progib štapa računa se pomoću diferencijalne jednadžbe savijanja elastične linije konzolnog nosača prema (3.2).

$$w_s(3) = \frac{30 \cdot 10^3 \cdot (3 \cdot 10^3)^2}{6 \cdot 210 \cdot 10^3 \cdot 2,77 \cdot 10^8} \cdot (3 \cdot 3 \cdot 10^3 - 3 \cdot 10^3) = 4,64 \text{ mm}$$

Funkcija progiba po dužini konzolnog nosača prikazana je dijagramom (slika 5.11):



Slika 6.11 - Progib tankostjenog štapa

Funkcija kuta uvijanja prikazana je pomoću diferencijalne jednadžbe uvijanja konzolnog nosača oko pola prema (3.4) koja glasi:

$$\alpha = \frac{M_t \cdot l^3}{E \cdot I_\omega \cdot k^2} \cdot \left[ \frac{x}{l} - \frac{1}{k} \cdot \operatorname{sh} k \frac{x}{l} - \frac{\operatorname{th} k}{k} \left( 1 - \operatorname{ch} k \frac{x}{l} \right) \right] \quad (3.4)$$

Uvrštavanjem u izraz (3.4) dobije se funkcija kuta uvijanja:

$$\alpha = \frac{4862068 \cdot 3 \cdot 10^3}{210 \cdot 10^3 \cdot 3,4133 \cdot 10^{12} \cdot 0,791318^2} \cdot \left[ \frac{3 \cdot 10^3}{3 \cdot 10^3} - \frac{1}{0,791318} \cdot \operatorname{sh} \left( 0,791318 \cdot \frac{3 \cdot 10^3}{3 \cdot 10^3} \right) - \frac{\operatorname{th} 0,791318}{0,791318} \left( 1 - \operatorname{ch} \left( 0,791318 \cdot \frac{3 \cdot 10^3}{3 \cdot 10^3} \right) \right) \right]$$

$$\alpha = 0,04884 \text{ rad}$$

Progib od uvijanja računa se prema (3.5):

$$w_U(3) = 0,04884 \cdot (100 + 62,07) = 7,916 \text{ mm}$$

Ukupni progib štapa od savijanja i uvijanja na slobodnom kraju štapa prema (3.6) iznosi:

$$w = 4,64 + 7,916 = 12,55 \text{ mm}$$

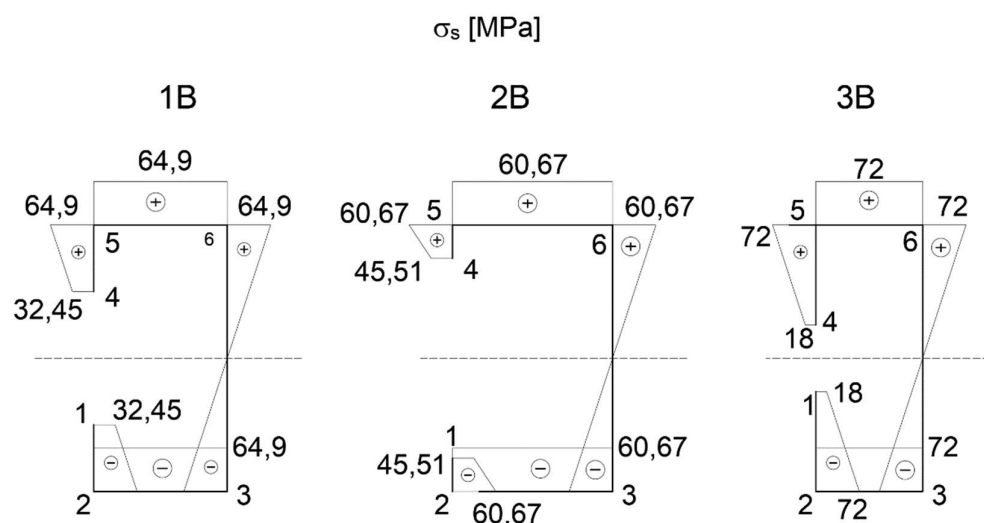


## 6.2. Grafički prikaz naprezanja varijanti 1B, 2B i 3B

U ovom poglavlju biti će prikazani dijagrami naprezanja i deformacije varijanti kako bi se moglo usporediti kako promjene dužina stranica tankostjenog štapa, uz konstantu površinu poprečnog presjeka utječu na ponašanje profila.

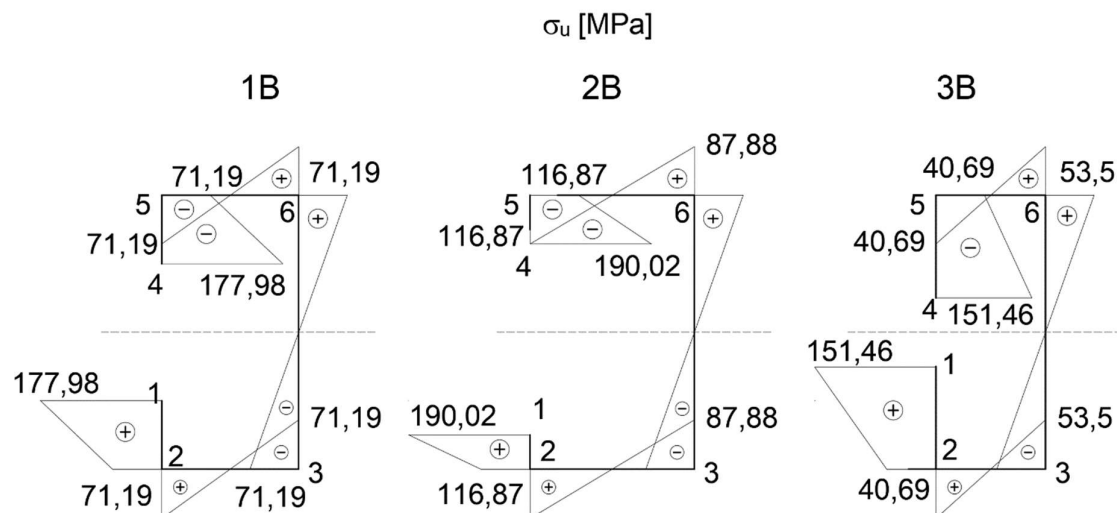
### 6.2.1. Grafički prikaz naprezanja u karakterističnim točkama

Naprezanja u karakterističnim točkama od momenta savijanja  $M_{y0}$  za varijante 1B, 2B i 3B prikazana su dijagramom (slika 5.13):

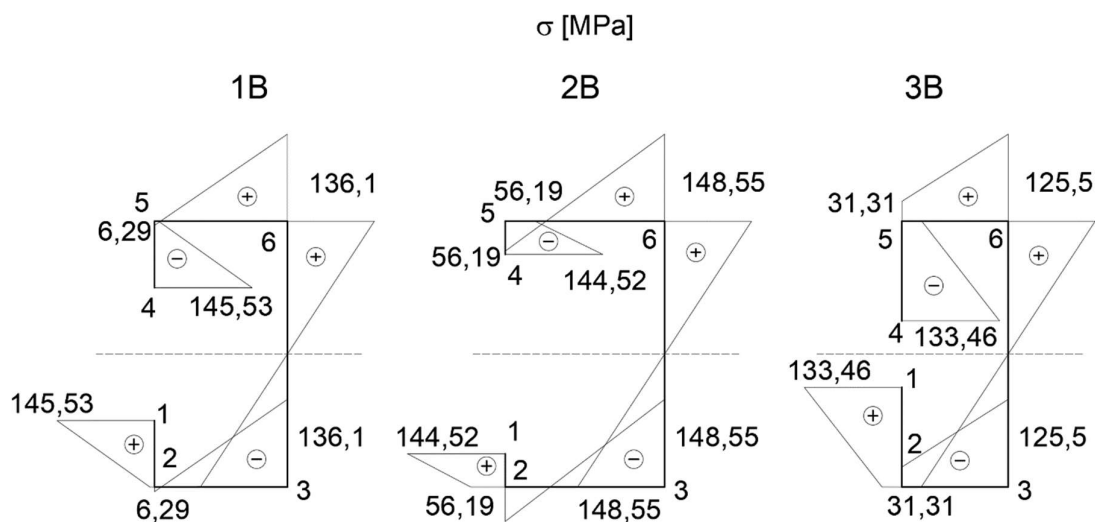


Slika 6.12 – Dijagram naprezanja od momenta savijanja  $M_{y0}$

Naprezanja u karakterističnim točkama od bimomenta  $B$  prikazana su na dijagramu (slika 5.14):

Slika 6.13 – Dijagram naprezanja od bimomenta  $B$ 

Ukupna naprezanja u karakterističnim točkama dana su dijagramom (slika 5.15):

Slika 6.14 – Dijagram ukupnih naprezanja  $M_{yo} + B$ 

Cjelokupni proračun i dijagrami svih varijanti primjera B dani su u priložima 4, 5 i 6.

## 7. Zaključak

U ovom radu prikazan je proračun konzolnog nosača otvorenog poprečnog presjeka za slučaj djelovanja sile na slobodnom kraju konzolnog nosača. Također dana su rješenja diferencijalnih jednadžbi savijanja i uvijanja konzolnog nosača otvorenog poprečnog presjeka. Proračun se vršio za dva primjera nosača od kojih je svaki imao po tri varijante sa konstantnom površinom poprečnog presjeka. Za svaku od varijanti izvršen je proračun geometrijskih karakteristika te unutarnjih sila. Proračun svih varijanti izvršen i je pomoću Excel programa koji za različite ulazne podatke prikazuje naprezanja i deformacije u karakterističnim točkama te je dan u prilogima 1-6.

Usporedbom varijanti primjera A može se doći do zaključka da najveći utjecaj na smanjivanje naprezanja uzrokovanog momentom savijanja i bimomentom ima visina stranice  $h$ . Također samim tim najmanji progib ima štap sa najdužom stranicom  $h$ . Kod primjera B dimenzije stranice  $h$  se nisu mijenjale. Najmanji progib imala je varijanta 3 kod koje su dimenzije stranice  $a$  bile veće nego kod ostalih varijanti.

Usporedbom rezultata svih varijanti dolazi se do zaključka kako profili većim dimenzijama stranice  $b$  imaju veće naprezanje od bimomenta dok stranice sa većim dimenzijama  $h$  stranice imaju manja naprezanja od momenta savijanja.

## Literatura

- [1] R. Pavazza, *Uvod u analizu tankostjenih štapova*. Zagreb: Kigen d.o.o., 2007.
- [2] B.Plazibat, V.Vetma, A.Matoković , *Nauka o čvrstoći*. Split , Sveučilište u Splitu., 2018.

## **Prilozi**

1. Prilog 1 – Excel proračun primjer 1A
2. Prilog 2 - Excel proračun primjer 2A
3. Prilog 3 - Excel proračun primjer 3A
4. Prilog 4 - Excel proračun primjer 1B
5. Prilog 5 - Excel proračun primjer 2B
6. Prilog 6 - Excel proračun primjer 3B

Prilog 1

Uvijanje tankostjenih štapova	
Primjer 1 Varijanta 1A	
Zadano	
$F$ [kN]	30
$E$ [MPa]	210000
$G$ [MPa]	80769
$l$ [m]	3

Dimenzije	
$t_1$ [mm]	0
$t_2$ [mm]	10
$t_3$ [mm]	15
$a$ [mm]	0
$b$ [mm]	200
$h$ [mm]	400
$A$ [mm <sup>2</sup> ]	10000

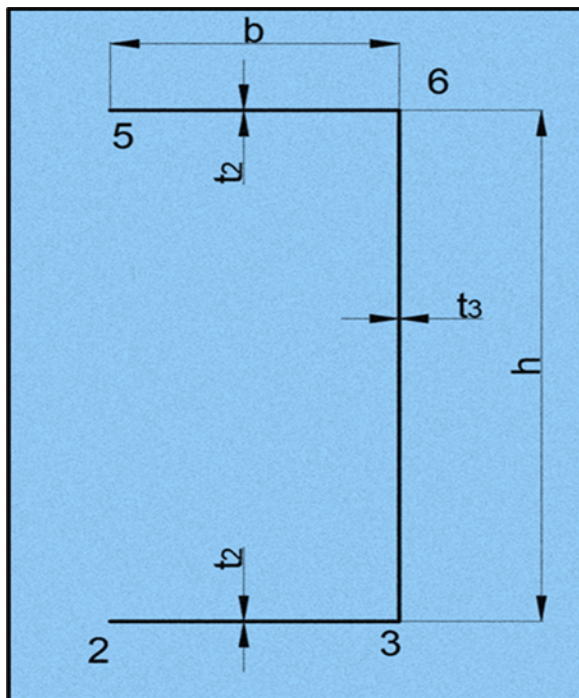
Statički moment površine	
$S'_z = \int_A y dA, \quad S'_y = \int_A z dA$	
$S'_z$ [mm <sup>3</sup> ]	400000
$S'_y$ [mm <sup>3</sup> ]	2000000

Koordinate težišta	
$y'_T = \frac{S'_z}{A}, \quad z'_T = \frac{S'_y}{A}$	
$y'_T$ [mm]	40,00
$z'_T$ [mm]	200

Glavni moment tromosti za os $y_0$	
$I_{y_0} = \int_A z^2 dA = \sum t \int_A z \cdot z \cdot ds$	
$I_{y_0}$ [mm <sup>4</sup> ]	2,40E+08

Sektorska koordinata $\omega'$	
$\omega'_1$ [mm <sup>2</sup> ]	-40000
$\omega'_2$ [mm <sup>2</sup> ]	-40000

Sektorski devijacijski moment tromosti	
$I_{y\omega_1} = \int_A z \omega_1 dA = t \cdot \int_A z \cdot \omega_1 \cdot ds$	
$I_{y\omega_1}$ [mm <sup>4</sup> ]	-1,60E+10



Položaj glavnog pola	
$\Delta_{y'} = \frac{I_{y\omega 1}}{I_{y0}}$	
$\Delta_{y'}$ [mm]	-66,67
$ \Delta y $ [mm]	66,67
Glavna sektorska koordinata $\omega$	
$\omega_1$ [mm <sup>2</sup> ]	0,0
$\omega_2$ [mm <sup>2</sup> ]	-26666,67
$\omega_3$ [mm <sup>2</sup> ]	13333,33
$\omega_4$ [mm <sup>2</sup> ]	0,0
$\omega_5$ [mm <sup>2</sup> ]	26666,67
$\omega_6$ [mm <sup>2</sup> ]	-13333,33

Glavni sektorski moment tromosti	
$I_{\omega} = \int_A \omega^2 dA = t \int_A \omega \cdot \omega \cdot ds$	
$I_{\omega}$ [mm <sup>6</sup> ]	1,06667E+12

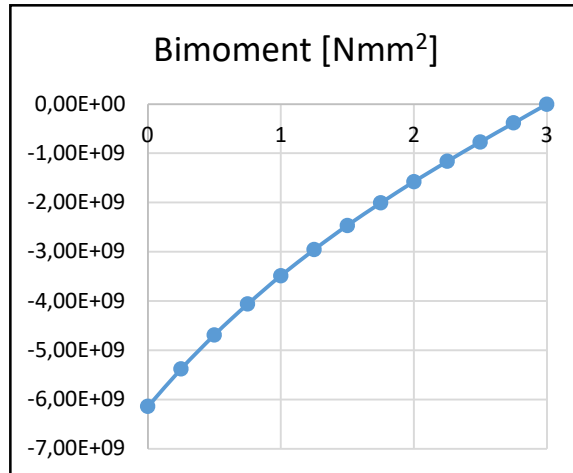
Moment savijanja	
$M_{y0} = -F \cdot l$	
$M_{y0}$ [Nmm]	-9,00E+07

Moment torzije	
$M_t = F \cdot d = F \cdot (y_t +  \Delta y )$	
$M_t$ [Nmm]	3,20E+06

Torzijski moment tromosti	
$I_t = \frac{1}{3} \sum s_i t_i^3$	
$I_t$ [mm <sup>4</sup> ]	583333,33

Koeficijent k	
$k = l \cdot \sqrt{\frac{G \cdot I_t}{E \cdot I_{\omega}}}$	
$k$	1,375871883

Bimoment	
$B = -\frac{M_z \cdot l}{k} \cdot \left( \operatorname{th}k \cdot \operatorname{ch}k \frac{x}{l} - \operatorname{sh}k \frac{x}{l} \right)$	
x [m]	B [Nmm <sup>2</sup> ]
0	-6,14E+09
0,25	-5,38E+09
0,5	-4,69E+09
0,75	-4,06E+09
1	-3,48E+09
1,25	-2,95E+09
1,5	-2,46E+09
1,75	-2,01E+09
2	-1,57E+09
2,25	-1,16E+09
2,5	-7,67E+08
2,75	-3,81E+08
3	0,00E+00



Naprezanja u karakterističnim točkama od momenta savijanja $M_y$	
$\sigma_s = \frac{M_{y0}}{I_{y0}} \cdot z_0$	
$\sigma_{s1}$ [MPa]	0,00
$\sigma_{s2}$ [MPa]	-75,00
$\sigma_{s3}$ [MPa]	-75,00
$\sigma_{s4}$ [MPa]	0,00
$\sigma_{s5}$ [MPa]	75,00
$\sigma_{s6}$ [MPa]	75,00

Naprezanja u karakterističnim točkama od bimomenta B	
$\sigma_u = \frac{B}{I_\omega} \cdot \omega$	
$\sigma_{u1}$ [MPa]	0,00
$\sigma_{u2}$ [MPa]	153,51
$\sigma_{u3}$ [MPa]	-76,75
$\sigma_{u4}$ [MPa]	0,00
$\sigma_{u5}$ [MPa]	-153,51
$\sigma_{u6}$ [MPa]	76,75



**Ukupna naprezanja u karakterističnim točkama**

$$\sigma = \sum \sigma$$

$\sigma_1$ [MPa]	0,00
$\sigma_2$ [MPa]	78,51
$\sigma_3$ [MPa]	-151,75
$\sigma_4$ [MPa]	0,00
$\sigma_5$ [MPa]	-78,51
$\sigma_6$ [MPa]	151,75

**Progib štapa**

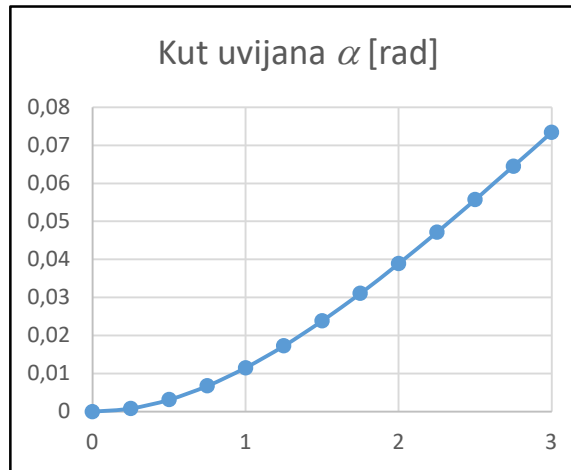
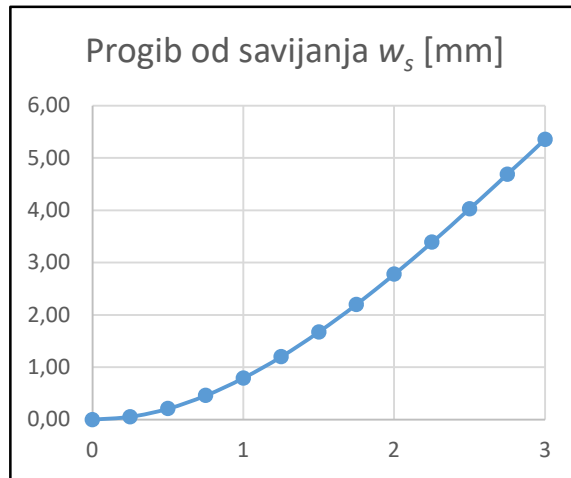
$$w_s = \frac{F \cdot x^2}{6 \cdot E \cdot I_{yo}} \cdot (3 \cdot l - x)$$

x [m]	$w_s$ [mm]
0	0,00
0,25	0,05
0,5	0,21
0,75	0,46
1	0,79
1,25	1,20
1,5	1,67
1,75	2,20
2	2,78
2,25	3,39
2,5	4,03
2,75	4,69
3	5,36

**Kut uvijanja**

$$\alpha = \frac{M_t \cdot l^3}{E \cdot I_{\omega} \cdot k^2} \cdot \left[ \frac{x}{l} - \frac{1}{k} \cdot \operatorname{sh} k \frac{x}{l} - \frac{\operatorname{th} k}{k} \left( 1 - \operatorname{ch} k \frac{x}{l} \right) \right]$$

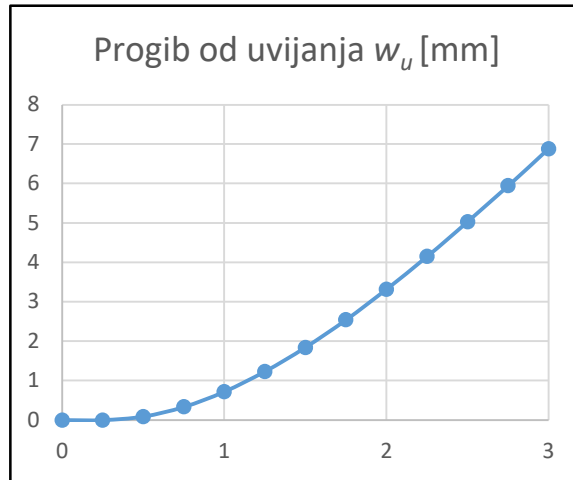
x [m]	$\alpha$ [rad]
0	0
0,25	0,00082
0,5	0,00314
0,75	0,00678
1	0,01154
1,25	0,01728
1,5	0,02385
1,75	0,03110
2	0,03891
2,25	0,04716
2,5	0,05574
2,75	0,06453



3	0,07343
---	---------

Progib od uvijanja	
$w_u = \alpha \cdot ( \Delta y  + y_t)$	
$\alpha$ [rad]	$w_u$ [mm]
0	0
0,00082	0,09
0,00314	0,34
0,00678	0,72
0,01154	1,23
0,01728	1,84
0,02385	2,54
0,03110	3,32
0,03891	4,15
0,04716	5,03
0,05574	5,95
0,06453	6,88
0,07343	7,83

Ukupni progib	
$w = w_s + w_u$	
$w$ [mm]	
	13,19



Prilog 2

Uvijanje tankostjenih štapova	
Primjer 1 Varijanta 2A	
Zadano	
$F$ [kN]	30
$E$ [MPa]	210000
$G$ [MPa]	80769
$l$ [m]	3

Dimenzije	
$t_1$ [mm]	0
$t_2$ [mm]	10
$t_3$ [mm]	15
$a$ [mm]	0
$b$ [mm]	275
$h$ [mm]	300
$A$ [mm <sup>2</sup> ]	10000

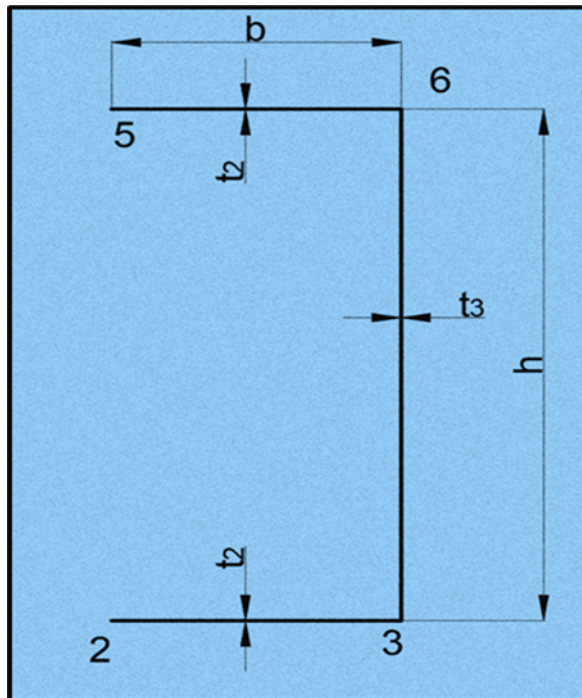
Statički moment površine	
$S'_z = \int_A y dA, \quad S'_y = \int_A z dA$	
$S'_z$ [mm <sup>3</sup> ]	756250
$S'_y$ [mm <sup>3</sup> ]	1500000

Koordinate težišta	
$y'_T = \frac{S'_z}{A}, \quad z'_T = \frac{S'_y}{A}$	
$y'_T$ [mm]	75,63
$z'_T$ [mm]	150

Glavni moment tromosti za os $y_0$	
$I_{y_0} = \int_A z^2 dA = \sum_A t \int z \cdot z \cdot ds$	
$I_{y_0}$ [mm <sup>4</sup> ]	1,58E+08

Sektorska koordinata $\omega'$	
$\omega'_1$ [mm <sup>2</sup> ]	-41250
$\omega'_2$ [mm <sup>2</sup> ]	-41250

Sektorski devijacijski moment tromosti	
$I_{y\omega_1} = \int_A z \omega_1 dA = t \cdot \int_A z \cdot \omega_1 \cdot ds$	
$I_{y\omega_1}$ [mm <sup>4</sup> ]	-1,70E+10



Položaj glavnog pola	
$\Delta_y = \frac{I_{y\omega 1}}{I_{y0}}$	
$\Delta_y$ [mm]	-108,04
$ \Delta y $ [mm]	108,04
Glavna sektorska koordinata $\omega$	
$\omega_1$ [mm <sup>2</sup> ]	0,0
$\omega_2$ [mm <sup>2</sup> ]	-25044,64
$\omega_3$ [mm <sup>2</sup> ]	16205,36
$\omega_4$ [mm <sup>2</sup> ]	0,0
$\omega_5$ [mm <sup>2</sup> ]	25044,64
$\omega_6$ [mm <sup>2</sup> ]	-16205,36

Glavni sektorski moment tromosti	
$I_\omega = \int_A \omega^2 dA = t \int_A \omega \cdot \omega \cdot ds$	
$I_\omega$ [mm <sup>6</sup> ]	1,28124E+12

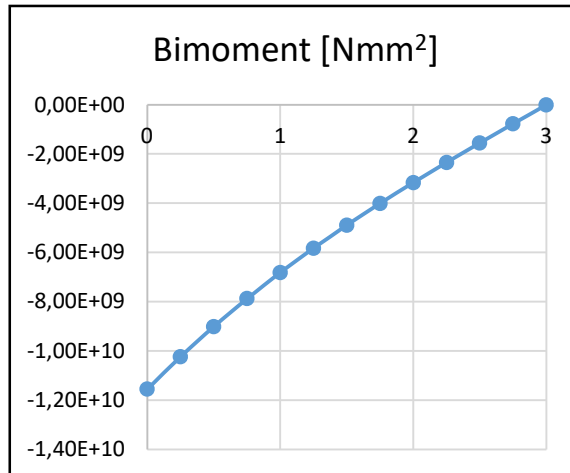
Moment savijanja	
$M_{y0} = -F \cdot l$	
$M_{y0}$ [Nmm]	-9,00E+07

Moment torzije	
$M_t = F \cdot d = F \cdot (y_t +  \Delta y )$	
$M_t$ [Nmm]	5,51E+06

Torzijski moment tromosti	
$I_t = \frac{1}{3} \sum s_i t_i^3$	
$I_t$ [mm <sup>4</sup> ]	520833,33

Koeficijent k	
$k = l \cdot \sqrt{\frac{G \cdot I_t}{E \cdot I_\omega}}$	
$k$	1,186229639

Bimoment	
$B = -\frac{M_t \cdot l}{k} \cdot \left( \operatorname{th}k \cdot \operatorname{ch}k \frac{x}{l} - \operatorname{sh}k \frac{x}{l} \right)$	
x [m]	B [Nmm <sup>2</sup> ]
0	-1,16E+10
0,25	-1,02E+10
0,5	-9,01E+09
0,75	-7,88E+09
1	-6,82E+09
1,25	-5,83E+09
1,5	-4,89E+09
1,75	-4,01E+09
2	-3,16E+09
2,25	-2,34E+09
2,5	-1,55E+09
2,75	-7,71E+08
3	0,00E+00



Naprezanja u karakterističnim točkama od momenta savijanja M <sub>y</sub>	
$\sigma_s = \frac{M_{y0}}{I_{y0}} \cdot z_0$	
σ <sub>s1</sub> [MPa]	0,00
σ <sub>s2</sub> [MPa]	-85,71
σ <sub>s3</sub> [MPa]	-85,71
σ <sub>s4</sub> [MPa]	0,00
σ <sub>s5</sub> [MPa]	85,71
σ <sub>s6</sub> [MPa]	85,71

Naprezanja u karakterističnim točkama od bimomenta B	
$\sigma_u = \frac{B}{I_\omega} \cdot \omega$	
σ <sub>u1</sub> [MPa]	0,00
σ <sub>u2</sub> [MPa]	225,91
σ <sub>u3</sub> [MPa]	-146,18
σ <sub>u4</sub> [MPa]	0,00
σ <sub>u5</sub> [MPa]	-225,91
σ <sub>u6</sub> [MPa]	146,18

Ukupna naprezanja u karakterističnim točkama

$$\sigma = \sum \sigma$$

$\sigma_1$ [MPa]	0,00
$\sigma_2$ [MPa]	140,20
$\sigma_3$ [MPa]	-231,89
$\sigma_4$ [MPa]	0,00
$\sigma_5$ [MPa]	-140,20
$\sigma_6$ [MPa]	231,89

Progib štapa

$$w_s = \frac{F \cdot x^2}{6 \cdot E \cdot I_{yo}} \cdot (3 \cdot l - x)$$

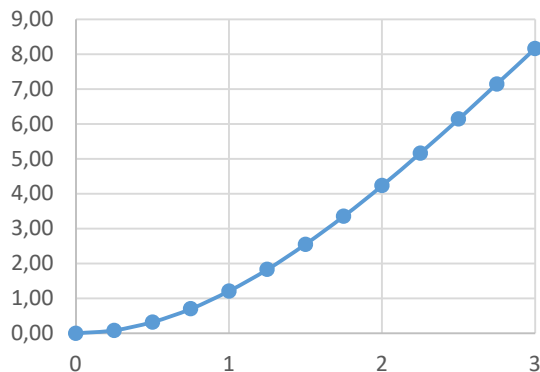
x [m]	$w_s$ [mm]
0	0,00
0,25	0,08
0,5	0,32
0,75	0,70
1	1,21
1,25	1,83
1,5	2,55
1,75	3,36
2	4,23
2,25	5,17
2,5	6,14
2,75	7,15
3	8,16

Kut uvijanja

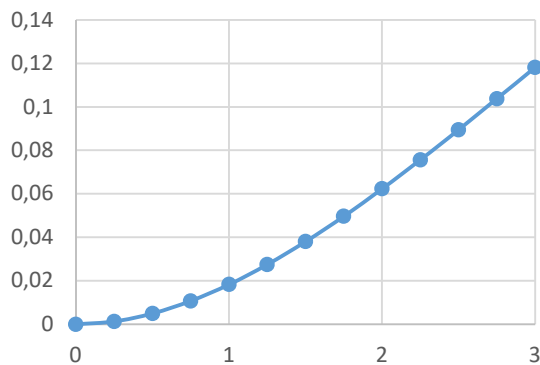
$$\alpha = \frac{M_t \cdot l^3}{E \cdot I_{\omega} \cdot k^2} \cdot \left[ \frac{x}{l} \frac{1}{k} \cdot \operatorname{sh} k \frac{x}{l} - \frac{\operatorname{th} k}{k} \left( 1 - \operatorname{ch} k \frac{x}{l} \right) \right]$$

x [m]	$\alpha$ [rad]
0	0
0,25	0,00129
0,5	0,00496
0,75	0,01072
1	0,01832
1,25	0,02750
1,5	0,03803
1,75	0,04971
2	0,06231
2,25	0,07565
2,5	0,08953
2,75	0,10377

Progib od savijanja  $w_s$  [mm]



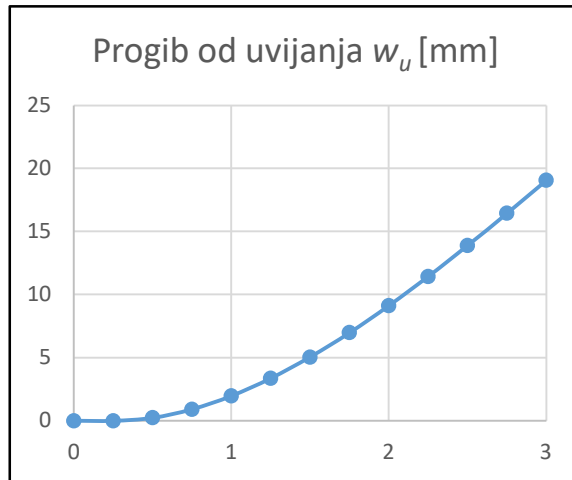
Kut uvijanja  $\alpha$  [rad]



3	0,11820
---	---------

Progib od uvijanja	
$w_u = \alpha \cdot ( \Delta y  + y_i)$	
$\alpha$ [rad]	$w_u$ [mm]
0	0
0,00129	0,24
0,00496	0,91
0,01072	1,97
0,01832	3,36
0,02750	5,05
0,03803	6,99
0,04971	9,13
0,06231	11,44
0,07565	13,89
0,08953	16,44
0,10377	19,06
0,11820	21,71

Ukupni progib	
$w = w_s + w_u$	
$w$ [mm]	
	29,87



Prilog 3

Uvijanje tankostjenih štapova	
Primjer 1 Varijanta 3A	
Zadano	
$F$ [kN]	30
$E$ [MPa]	210000
$G$ [MPa]	80769
$l$ [m]	3

Dimenzije	
$t_1$ [mm]	0
$t_2$ [mm]	10
$t_3$ [mm]	15
$a$ [mm]	0
$b$ [mm]	125
$h$ [mm]	500
$A$ [mm <sup>2</sup> ]	10000

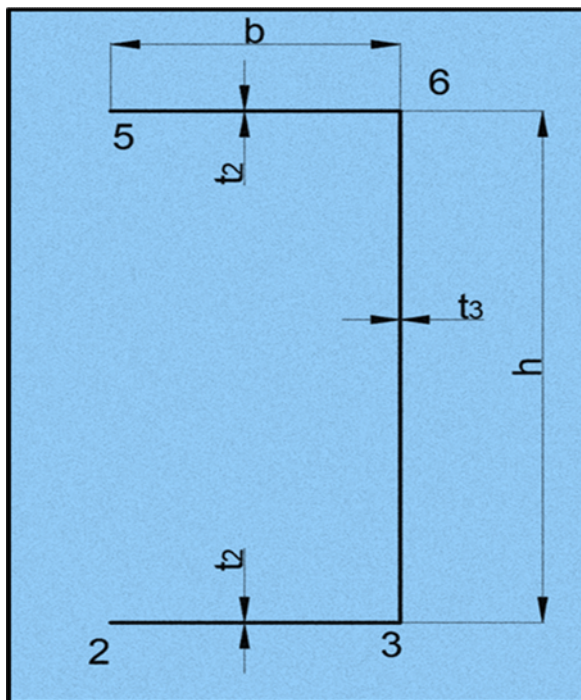
Statički moment površine	
$S'_z = \int_A y dA, \quad S'_y = \int_A z dA$	
$S'_z$ [mm <sup>3</sup> ]	156250
$S'_y$ [mm <sup>3</sup> ]	2500000

Koordinate težišta	
$y'_T = \frac{S'_z}{A}, \quad z'_T = \frac{S'_y}{A}$	
$y'_T$ [mm]	15,63
$z'_T$ [mm]	250

Glavni moment tromosti za os $y_0$	
$I_{y_0} = \int_A z^2 dA = \sum_A t \int z \cdot z \cdot ds$	
$I_{y_0}$ [mm <sup>4</sup> ]	3,13E+08

Sektorska koordinata $\omega'$	
$\omega'_1$ [mm <sup>2</sup> ]	-31250
$\omega'_2$ [mm <sup>2</sup> ]	-31250

Sektorski devijacijski moment tromosti	
$I_{y\omega_1} = \int_A z \omega_1 dA = t \cdot \int_A z \cdot \omega_1 \cdot ds$	
$I_{y\omega_1}$ [mm <sup>4</sup> ]	-9,77E+09





Položaj glavnog pola	
$\Delta_y = \frac{I_{y\omega 1}}{I_{y0}}$	
$\Delta_y$ [mm]	-31,25
$ \Delta y $ [mm]	31,25
Glavna sektorska koordinata $\omega$	
$\omega_1$ [mm <sup>2</sup> ]	0,0
$\omega_2$ [mm <sup>2</sup> ]	-23437,50
$\omega_3$ [mm <sup>2</sup> ]	7812,50
$\omega_4$ [mm <sup>2</sup> ]	0,0
$\omega_5$ [mm <sup>2</sup> ]	23437,50
$\omega_6$ [mm <sup>2</sup> ]	-7812,50

Glavni sektorski moment tromosti	
$I_\omega = \int_A \omega^2 dA = t \int_A \omega \cdot \omega \cdot ds$	
$I_\omega$ [mm <sup>6</sup> ]	5,08626E+11

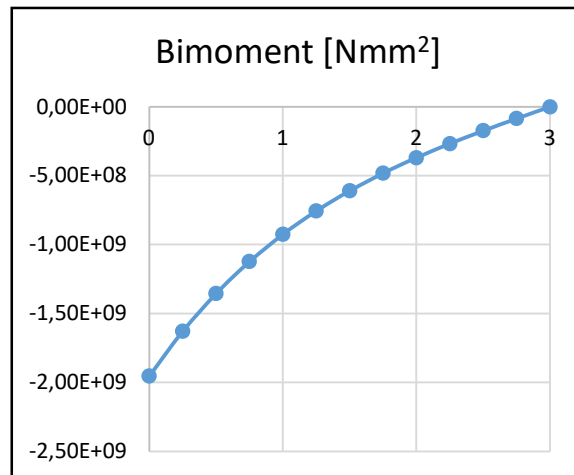
Moment savijanja	
$M_{y0} = -F \cdot l$	
$M_{y0}$ [Nmm]	-9,00E+07

Moment torzije	
$M_t = F \cdot d = F \cdot (y_t +  \Delta y )$	
$M_t$ [Nmm]	1,41E+06

Torzijski moment tromosti	
$I_t = \frac{1}{3} \sum s_i t_i^3$	
$I_t$ [mm <sup>4</sup> ]	645833,33

Koeficijent k	
$k = l \cdot \sqrt{\frac{G \cdot I_t}{E \cdot I_\omega}}$	
$k$	2,096499587

Bimoment	
$B = -\frac{M_t \cdot l}{k} \cdot \left( \operatorname{th}k \cdot \operatorname{ch}k \frac{x}{l} - \operatorname{sh}k \frac{x}{l} \right)$	
x [m]	B [Nmm <sup>2</sup> ]
0	-1,95E+09
0,25	-1,63E+09
0,5	-1,36E+09
0,75	-1,12E+09
1	-9,25E+08
1,25	-7,56E+08
1,5	-6,10E+08
1,75	-4,82E+08
2	-3,69E+08
2,25	-2,67E+08
2,5	-1,74E+08
2,75	-8,56E+07
3	0,00E+00



Naprezanja u karakterističnim točkama od momenta savijanja M <sub>y</sub>	
$\sigma_s = \frac{M_{y0}}{I_{y0}} \cdot z_0$	
$\sigma_{s1}$ [MPa]	0,00
$\sigma_{s2}$ [MPa]	-72,00
$\sigma_{s3}$ [MPa]	-72,00
$\sigma_{s4}$ [MPa]	0,00
$\sigma_{s5}$ [MPa]	72,00
$\sigma_{s6}$ [MPa]	72,00

Naprezanja u karakterističnim točkama od bimomenta B	
$\sigma_u = \frac{B}{I_\omega} \cdot \omega$	
$\sigma_{u1}$ [MPa]	0,00
$\sigma_{u2}$ [MPa]	89,97
$\sigma_{u3}$ [MPa]	-29,99
$\sigma_{u4}$ [MPa]	0,00
$\sigma_{u5}$ [MPa]	-89,97
$\sigma_{u6}$ [MPa]	29,99

Ukupna naprezanja u karakterističnim točkama

$$\sigma = \sum \sigma$$

$\sigma_1$ [MPa]	0,00
$\sigma_2$ [MPa]	17,97
$\sigma_3$ [MPa]	-101,99
$\sigma_4$ [MPa]	0,00
$\sigma_5$ [MPa]	-17,97
$\sigma_6$ [MPa]	101,99

Progib štapa

$$w_s = \frac{F \cdot x^2}{6 \cdot E \cdot I_{yo}} \cdot (3 \cdot l - x)$$

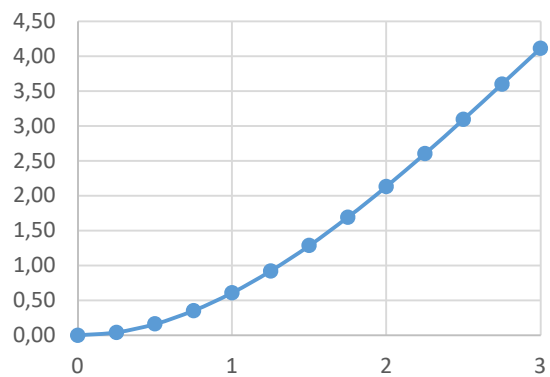
x [m]	$w_s$ [mm]
0	0,00
0,25	0,04
0,5	0,16
0,75	0,35
1	0,61
1,25	0,92
1,5	1,29
1,75	1,69
2	2,13
2,25	2,60
2,5	3,10
2,75	3,60
3	4,11

Kut uvijanja

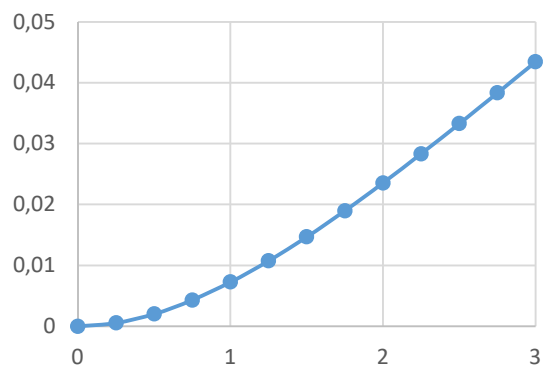
$$\alpha = \frac{M_t \cdot l^3}{E \cdot I_{\omega} \cdot k^2} \cdot \left[ \frac{x}{l} - \frac{1}{k} \cdot \operatorname{sh} k \frac{x}{l} - \frac{\operatorname{th} k}{k} \left( 1 - \operatorname{ch} k \frac{x}{l} \right) \right]$$

x [m]	$\alpha$ [rad]
0	0
0,25	0,00054
0,5	0,00203
0,75	0,00432
1	0,00727
1,25	0,01076
1,5	0,01469
1,75	0,01899
2	0,02356
2,25	0,02835
2,5	0,03330
2,75	0,03835

Progib od savijanja  $w_s$  [mm]



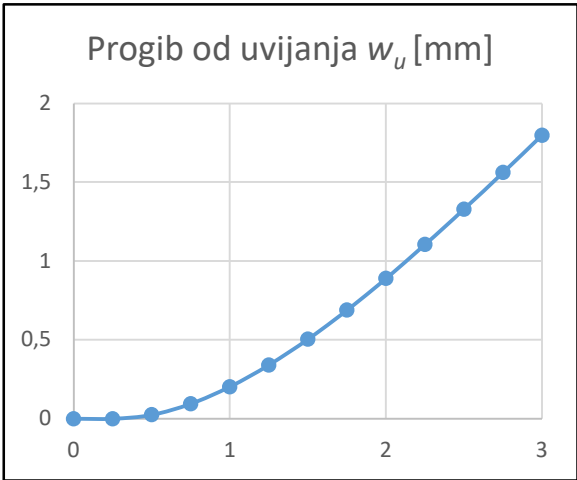
Kut uvijanja  $\alpha$  [rad]



3	0,04345
---	---------

Progib od uvijanja	
$w_u = \alpha \cdot ( \Delta y  + y_i)$	
$\alpha$ [rad]	$w_u$ [mm]
0	0
0,00054	0,03
0,00203	0,10
0,00432	0,20
0,00727	0,34
0,01076	0,50
0,01469	0,69
0,01899	0,89
0,02356	1,10
0,02835	1,33
0,03330	1,56
0,03835	1,80
0,04345	2,04

Ukupni progib	
$w = w_s + w_u$	
$w$ [mm]	
	6,15



Prilog 4

Uvijanje tankostjenih štapova	
Primjer 2 Varijanta 1B	
Zadano	
$F$ [kN]	30
$E$ [MPa]	210000
$G$ [MPa]	80769
$l$ [m]	3

Dimenzije	
$t_1$ [mm]	8
$t_2$ [mm]	10
$t_3$ [mm]	15
$a$ [mm]	100
$b$ [mm]	200
$h$ [mm]	400
$A$ [mm <sup>2</sup> ]	11600

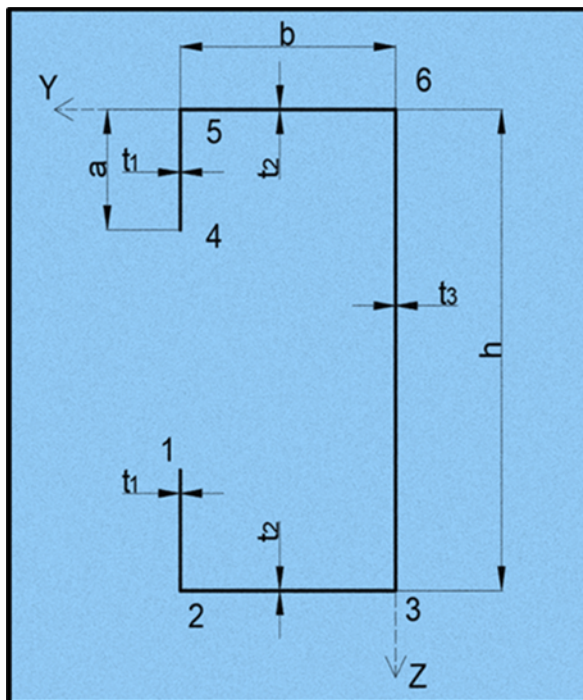
Statički moment površine	
$S'_z = \int_A y dA, \quad S'_y = \int_A z dA$	
$S'_z$ [mm <sup>3</sup> ]	720000
$S'_y$ [mm <sup>3</sup> ]	2320000

Koordinate težišta	
$y'_T = \frac{S'_z}{A}, \quad z'_T = \frac{S'_y}{A}$	
$y'_T$ [mm]	62,07
$z'_T$ [mm]	200

Glavni moment tromosti za os $y_0$	
$I_{y_0} = \int_A z^2 dA = \sum_A t \int z \cdot z \cdot ds$	
$I_{y_0}$ [mm <sup>4</sup> ]	2,77E+08

Sektorska koordinata $\omega'$	
$\omega'_1$ [mm <sup>2</sup> ]	-60000
$\omega'_2$ [mm <sup>2</sup> ]	-40000

Sektorski devijacijski moment tromosti	
$I_{y\omega_1} = \int_A z \omega_1 dA = t \cdot \int_A z \cdot \omega_1 \cdot ds$	
$I_{y\omega_1}$ [mm <sup>4</sup> ]	-2,77E+10



Položaj glavnog pola	
$\Delta_y = \frac{I_{y\omega 1}}{I_{y0}}$	
$\Delta_y$ [mm]	-100,00
$ \Delta y $ [mm]	100,00
Glavna sektorska koordinata $\omega$	
$\omega_1$ [mm <sup>2</sup> ]	-50000,0
$\omega_2$ [mm <sup>2</sup> ]	-20000,00
$\omega_3$ [mm <sup>2</sup> ]	20000,00
$\omega_4$ [mm <sup>2</sup> ]	50000,0
$\omega_5$ [mm <sup>2</sup> ]	20000,00
$\omega_6$ [mm <sup>2</sup> ]	-20000,00

Glavni sektorski moment tromosti	
$I_\omega = \int_A \omega^2 dA = t \int_A \omega \cdot \omega \cdot ds$	
$I_\omega$ [mm <sup>6</sup> ]	3,41333E+12

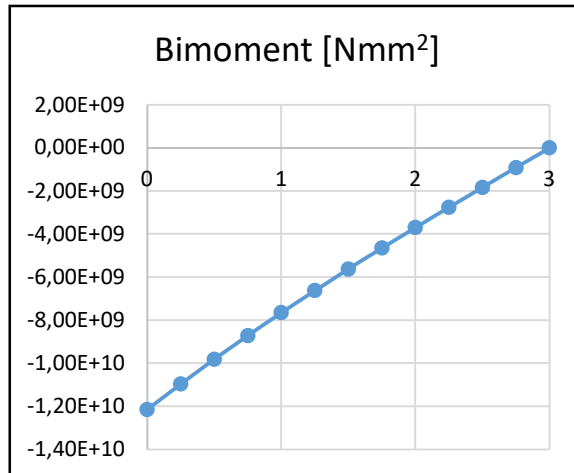
Moment savijanja	
$M_{y0} = -F \cdot l$	
$M_{y0}$ [Nmm]	-9,00E+07

Moment torzije	
$M_t = F \cdot d = F \cdot (y_t +  \Delta y )$	
$M_t$ [Nmm]	4,86E+06

Torzijski moment tromosti	
$I_t = \frac{1}{3} \sum s_i t_i^3$	
$I_t$ [mm <sup>4</sup> ]	617466,67

Koeficijent k	
$k = l \cdot \sqrt{\frac{G \cdot I_t}{E \cdot I_\omega}}$	
$k$	0,791318589

Bimoment	
$B = -\frac{M_x \cdot l}{k} \cdot \left( \operatorname{th}k \cdot \operatorname{ch}k \frac{x}{l} - \operatorname{sh}k \frac{x}{l} \right)$	
x [m]	B [Nmm <sup>2</sup> ]
0	-1,22E+10
0,25	-1,10E+10
0,5	-9,82E+09
0,75	-8,72E+09
1	-7,66E+09
1,25	-6,63E+09
1,5	-5,63E+09
1,75	-4,65E+09
2	-3,70E+09
2,25	-2,76E+09
2,5	-1,83E+09
2,75	-9,15E+08
3	2,05E-06



Naprezanja u karakterističnim točkama od momenta savijanja $M_y$	
$\sigma_s = \frac{M_{y0}}{I_{y0}} \cdot z_0$	
$\sigma_{s1}$ [MPa]	-32,45
$\sigma_{s2}$ [MPa]	-64,90
$\sigma_{s3}$ [MPa]	-64,90
$\sigma_{s4}$ [MPa]	32,45
$\sigma_{s5}$ [MPa]	64,90
$\sigma_{s6}$ [MPa]	64,90

Naprezanja u karakterističnim točkama od bimomenta B	
$\sigma_u = \frac{B}{I_\omega} \cdot \omega$	
$\sigma_{u1}$ [MPa]	177,98
$\sigma_{u2}$ [MPa]	71,19
$\sigma_{u3}$ [MPa]	-71,19
$\sigma_{u4}$ [MPa]	-177,98
$\sigma_{u5}$ [MPa]	-71,19
$\sigma_{u6}$ [MPa]	71,19

Ukupna naprezanja u karakterističnim točkama

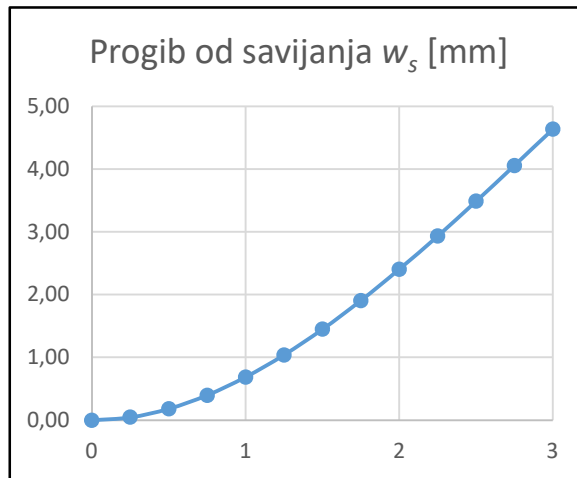
$$\sigma = \sum \sigma$$

$\sigma_1$ [MPa]	145,53
$\sigma_2$ [MPa]	6,29
$\sigma_3$ [MPa]	-136,10
$\sigma_4$ [MPa]	-145,53
$\sigma_5$ [MPa]	-6,29
$\sigma_6$ [MPa]	136,10

Progib štapa

$$w_s = \frac{F \cdot x^2}{6 \cdot E \cdot I_{yo}} \cdot (3 \cdot l - x)$$

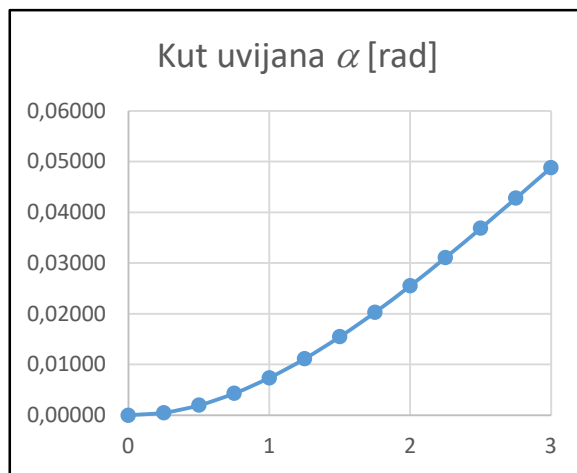
x [m]	$w_s$ [mm]
0	0,00
0,25	0,05
0,5	0,18
0,75	0,40
1	0,69
1,25	1,04
1,5	1,45
1,75	1,91
2	2,40
2,25	2,93
2,5	3,49
2,75	4,06
3	4,64



Kut uvijanja

$$\alpha = \frac{M_t \cdot l^3}{E \cdot I_{\omega} \cdot k^2} \cdot \left[ \frac{x}{l} \frac{1}{k} \cdot \operatorname{sh} k \frac{x}{l} - \frac{\operatorname{th} k}{k} \left( 1 - \operatorname{ch} k \frac{x}{l} \right) \right]$$

x [m]	$\alpha$ [rad]
0	0,00000
0,25	0,00051
0,5	0,00198
0,75	0,00431
1	0,00739
1,25	0,01114
1,5	0,01547
1,75	0,02030
2	0,02552
2,25	0,03107
2,5	0,03687
2,75	0,04282





3	0,04885
---	---------

**Progib od uvijanja**

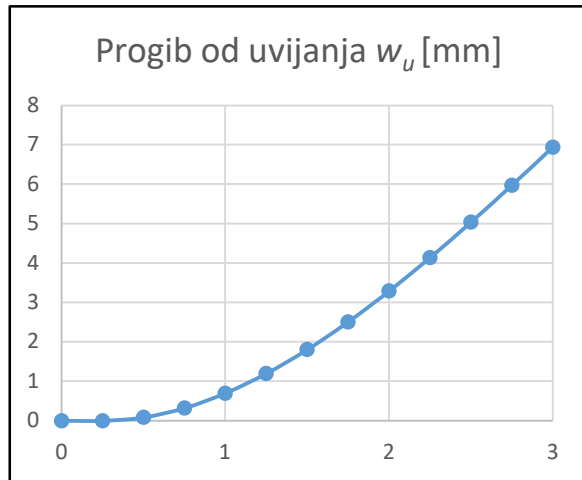
$$w_u = \alpha \cdot (|\Delta y| + y_i)$$

$\alpha$ [rad]	$w_u$ [mm]
0	0
0,00051	0,08
0,00198	0,32
0,00431	0,70
0,00739	1,20
0,01114	1,81
0,01547	2,51
0,02030	3,29
0,02552	4,14
0,03107	5,04
0,03687	5,97
0,04282	6,94
0,04885	7,92

**Ukupni progib**

$$w = w_s + w_u$$

$w$ [mm]	12,55
----------	-------



Prilog 5

Uvijanje tankostjenih štapova	
Primjer 2 Varijanta 2B	
Zadano	
$F$ [kN]	30
$E$ [MPa]	210000
$G$ [MPa]	80769
$l$ [m]	3

Dimenzije	
$t_1$ [mm]	8
$t_2$ [mm]	10
$t_3$ [mm]	15
$a$ [mm]	50
$b$ [mm]	240
$h$ [mm]	400
$A$ [mm <sup>2</sup> ]	11600

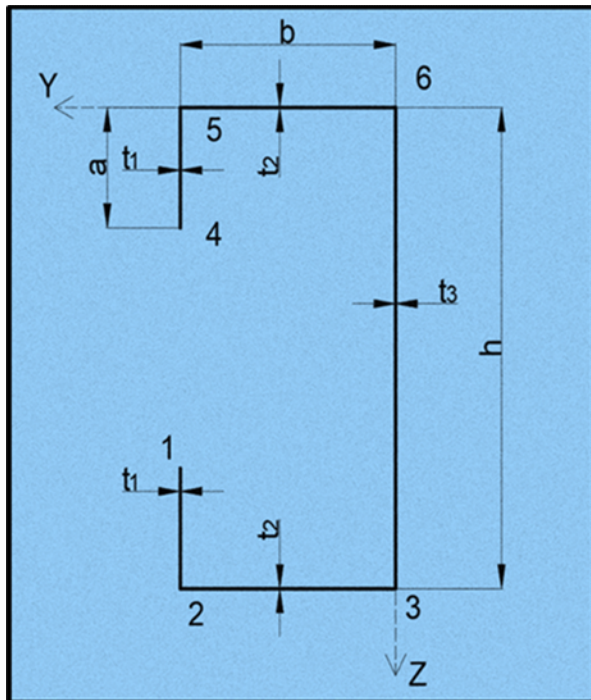
Statički moment površine	
$S'_z = \int_A y dA, \quad S'_y = \int_A z dA$	
$S'_z$ [mm <sup>3</sup> ]	768000
$S'_y$ [mm <sup>3</sup> ]	2320000

Koordinate težišta	
$y'_T = \frac{S'_z}{A}, \quad z'_T = \frac{S'_y}{A}$	
$y'_T$ [mm]	66,21
$z'_T$ [mm]	200

Glavni moment tromosti za os $y_0$	
$I_{y_0} = \int_A z^2 dA = \sum_A t \int z \cdot z \cdot ds$	
$I_{y_0}$ [mm <sup>4</sup> ]	2,97E+08

Sektorska koordinata $\omega'$	
$\omega'_1$ [mm <sup>2</sup> ]	-60000
$\omega'_2$ [mm <sup>2</sup> ]	-48000

Sektorski devijacijski moment tromosti	
$I_{y\omega_1} = \int_A z \omega_1 dA = t \cdot \int_A z \cdot \omega_1 \cdot ds$	
$I_{y\omega_1}$ [mm <sup>4</sup> ]	-3,06E+10



Položaj glavnog pola

$$\Delta_y = \frac{I_{y\omega 1}}{I_{y0}}$$

$\Delta_y$ [mm]	-103,01
$ \Delta y $ [mm]	103,01

Glavna sektorska koordinata  $\omega$

$\omega_1$ [mm <sup>2</sup> ]	-44548,3
$\omega_2$ [mm <sup>2</sup> ]	-27397,75
$\omega_3$ [mm <sup>2</sup> ]	20602,25
$\omega_4$ [mm <sup>2</sup> ]	44548,3
$\omega_5$ [mm <sup>2</sup> ]	27397,75
$\omega_6$ [mm <sup>2</sup> ]	-20602,25

Glavni sektorski moment tromosti

$$I_\omega = \int_A \omega^2 dA = t \int_A \omega \cdot \omega \cdot ds$$

$I_\omega$ [mm <sup>6</sup> ]	2,88078E+12
-------------------------------	-------------

Moment savijanja

$$M_{y0} = -F \cdot l$$

$M_{y0}$ [Nmm]	-9,00E+07
----------------	-----------

Moment torzije

$$M_t = F \cdot d = F \cdot (y_t + |\Delta y|)$$

$M_t$ [Nmm]	5,08E+06
-------------	----------

Torzijski moment tromosti

$$I_t = \frac{1}{3} \sum s_i t_i^3$$

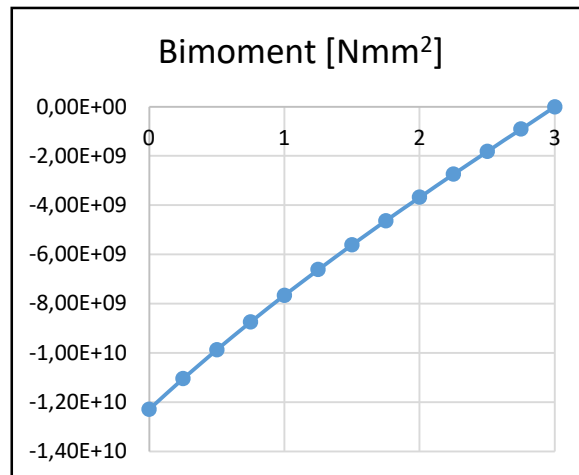
$I_t$ [mm <sup>4</sup> ]	627066,67
--------------------------	-----------

Koeficijent k

$$k = l \cdot \sqrt{\frac{G \cdot I_t}{E \cdot I_\omega}}$$

$k$	0,868032579
-----	-------------

Bimoment	
$B = -\frac{M_t \cdot l}{k} \cdot \left( \operatorname{th}k \cdot \operatorname{ch}k \frac{x}{l} - \operatorname{sh}k \frac{x}{l} \right)$	
x [m]	B [Nmm <sup>2</sup> ]
0	-1,23E+10
0,25	-1,10E+10
0,5	-9,87E+09
0,75	-8,74E+09
1	-7,66E+09
1,25	-6,62E+09
1,5	-5,61E+09
1,75	-4,63E+09
2	-3,67E+09
2,25	-2,74E+09
2,5	-1,82E+09
2,75	-9,07E+08
3	0,00E+00



Naprezanja u karakterističnim točkama od momenta savijanja $M_y$	
$\sigma_s = \frac{M_{y0}}{I_{y0}} \cdot z_0$	
$\sigma_{s1}$ [MPa]	-45,51
$\sigma_{s2}$ [MPa]	-60,67
$\sigma_{s3}$ [MPa]	-60,67
$\sigma_{s4}$ [MPa]	45,51
$\sigma_{s5}$ [MPa]	60,67
$\sigma_{s6}$ [MPa]	60,67

Naprezanja u karakterističnim točkama od bimomenta B	
$\sigma_u = \frac{B}{I_\omega} \cdot \omega$	
$\sigma_{u1}$ [MPa]	190,02
$\sigma_{u2}$ [MPa]	116,87
$\sigma_{u3}$ [MPa]	-87,88
$\sigma_{u4}$ [MPa]	-190,02
$\sigma_{u5}$ [MPa]	-116,87
$\sigma_{u6}$ [MPa]	87,88

Ukupna naprezanja u karakterističnim točkama

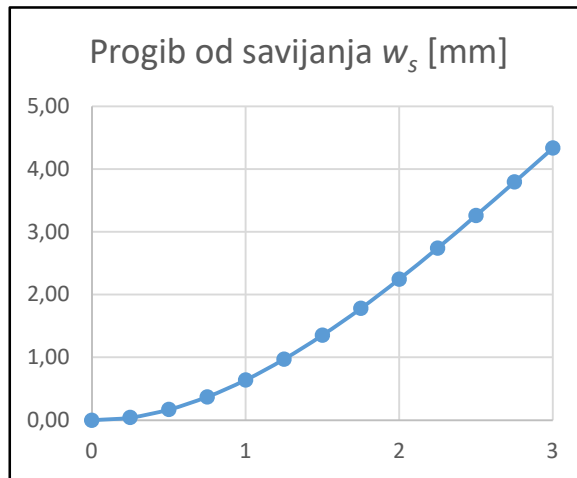
$$\sigma = \sum \sigma$$

$\sigma_1$ [MPa]	144,52
$\sigma_2$ [MPa]	56,19
$\sigma_3$ [MPa]	-148,55
$\sigma_4$ [MPa]	-144,52
$\sigma_5$ [MPa]	-56,19
$\sigma_6$ [MPa]	148,55

Progib štapa

$$w_s = \frac{F \cdot x^2}{6 \cdot E \cdot I_{yo}} \cdot (3 \cdot l - x)$$

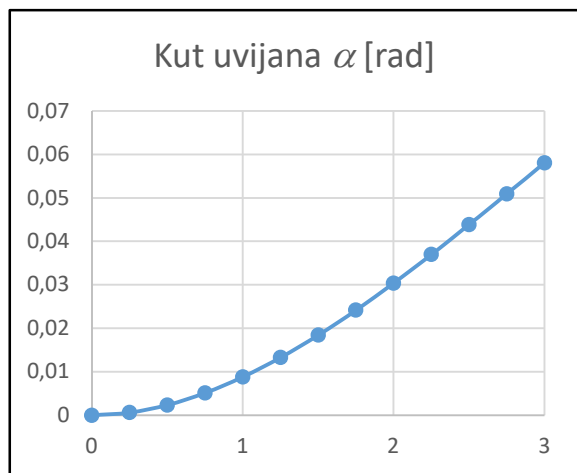
x [m]	$w_s$ [mm]
0	0,00
0,25	0,04
0,5	0,17
0,75	0,37
1	0,64
1,25	0,97
1,5	1,35
1,75	1,78
2	2,25
2,25	2,74
2,5	3,26
2,75	3,79
3	4,33



Kut uvijanja

$$\alpha = \frac{M_t \cdot l^3}{E \cdot I_{\omega} \cdot k^2} \cdot \left[ \frac{x}{l} - \frac{1}{k} \cdot \operatorname{sh} k \frac{x}{l} - \frac{\operatorname{th} k}{k} \left( 1 - \operatorname{ch} k \frac{x}{l} \right) \right]$$

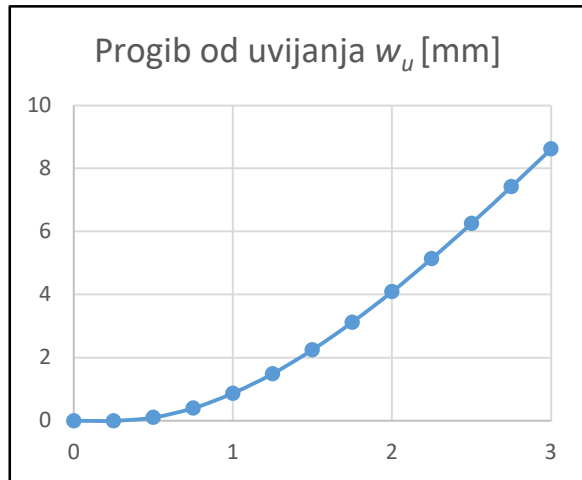
x [m]	$\alpha$ [rad]
0	0
0,25	0,00061
0,5	0,00237
0,75	0,00514
1	0,00882
1,25	0,01329
1,5	0,01845
1,75	0,02418
2	0,03039
2,25	0,03698
2,5	0,04386
2,75	0,05092



3	0,05808
---	---------

Progib od uvijanja	
$w_u = \alpha \cdot ( \Delta y  + y_i)$	
$\alpha$ [rad]	$w_u$ [mm]
0	0
0,00061	0,10
0,00237	0,40
0,00514	0,87
0,00882	1,49
0,01329	2,25
0,01845	3,12
0,02418	4,09
0,03039	5,14
0,03698	6,26
0,04386	7,42
0,05092	8,62
0,05808	9,83

Ukupni progib	
$w = w_S + w_U$	
$w$ [mm]	
	14,16



Prilog 6

Uvijanje tankostjenih štapova	
Primjer 2 Varijanta 3B	
Zadano	
$F$ [kN]	30
$E$ [MPa]	210000
$G$ [MPa]	80769
$l$ [m]	3

Dimenzije	
$t_1$ [mm]	8
$t_2$ [mm]	10
$t_3$ [mm]	15
$a$ [mm]	150
$b$ [mm]	160
$h$ [mm]	400
$A$ [mm <sup>2</sup> ]	11600

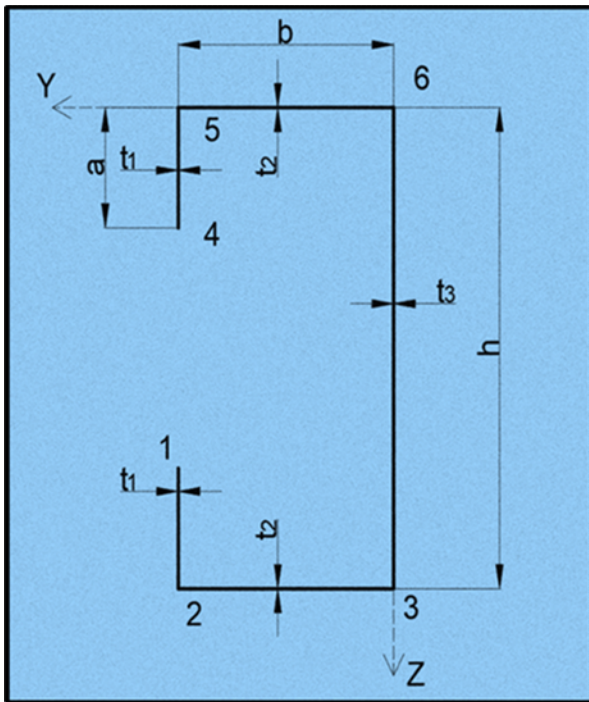
Statički moment površine	
$S'_z = \int_A y dA, \quad S'_y = \int_A z dA$	
$S'_z$ [mm <sup>3</sup> ]	640000
$S'_y$ [mm <sup>3</sup> ]	2320000

Koordinate težišta	
$y'_T = \frac{S'_z}{A}, \quad z'_T = \frac{S'_y}{A}$	
$y'_T$ [mm]	55,17
$z'_T$ [mm]	200

Glavni moment tromosti za os $y_0$	
$I_{y_0} = \int_A z^2 dA = \sum_A t \int z \cdot z \cdot ds$	
$I_{y_0}$ [mm <sup>4</sup> ]	2,50E+08

Sektorska koordinata $\omega'$	
$\omega'_1$ [mm <sup>2</sup> ]	-56000
$\omega'_2$ [mm <sup>2</sup> ]	-32000

Sektorski devijacijski moment tromosti	
$I_{y\omega_1} = \int_A z \omega_1 dA = t \cdot \int_A z \cdot \omega_1 \cdot ds$	
$I_{y\omega_1}$ [mm <sup>4</sup> ]	-2,27E+10



Položaj glavnog pola	
$\Delta_y = \frac{I_{y\omega 1}}{I_{y0}}$	
$\Delta_y$ [mm]	-90,88
$ \Delta y $ [mm]	90,88
Glavna sektorska koordinata $\omega$	
$\omega_1$ [mm <sup>2</sup> ]	-51456,0
$\omega_2$ [mm <sup>2</sup> ]	-13824,00
$\omega_3$ [mm <sup>2</sup> ]	18176,00
$\omega_4$ [mm <sup>2</sup> ]	51456,0
$\omega_5$ [mm <sup>2</sup> ]	13824,00
$\omega_6$ [mm <sup>2</sup> ]	-18176,00

Glavni sektorski moment tromosti	
$I_\omega = \int_A \omega^2 dA = t \int_A \omega \cdot \omega \cdot ds$	
$I_\omega$ [mm <sup>6</sup> ]	3,78907E+12

Moment savijanja	
$M_{y0} = -F \cdot l$	
$M_{y0}$ [Nmm]	-9,00E+07

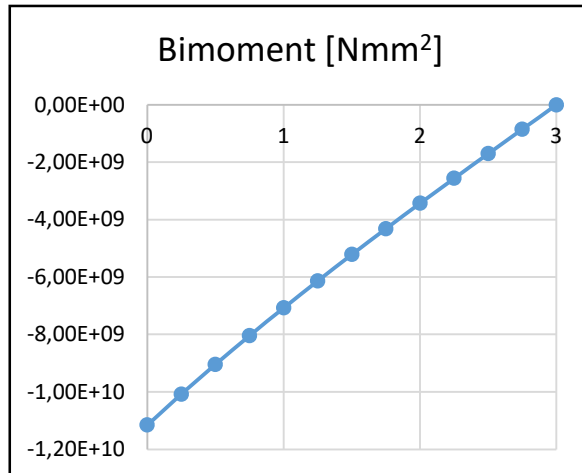
Moment torzije	
$M_t = F \cdot d = F \cdot (y_t +  \Delta y )$	
$M_t$ [Nmm]	4,38E+06

Torzijski moment tromosti	
$I_t = \frac{1}{3} \sum s_i t_i^3$	
$I_t$ [mm <sup>4</sup> ]	607866,67

Koeficijent k	
$k = l \cdot \sqrt{\frac{G \cdot I_t}{E \cdot I_\omega}}$	
$k$	0,745197921



Bimoment	
$B = -\frac{M_t \cdot l}{k} \cdot \left( \text{th}k \cdot \text{ch}k \frac{x}{l} - \text{sh}k \frac{x}{l} \right)$	
x [m]	B [Nmm <sup>2</sup> ]
0	-1,12E+10
0,25	-1,01E+10
0,5	-9,04E+09
0,75	-8,04E+09
1	-7,07E+09
1,25	-6,13E+09
1,5	-5,21E+09
1,75	-4,31E+09
2	-3,43E+09
2,25	-2,56E+09
2,5	-1,70E+09
2,75	-8,49E+08
3	0,00E+00



Naprezanja u karakterističnim točkama od momenta savijanja M <sub>y</sub>	
$\sigma_s = \frac{M_{y0}}{I_{y0}} \cdot z_0$	
$\sigma_{s1}$ [MPa]	-18,00
$\sigma_{s2}$ [MPa]	-72,00
$\sigma_{s3}$ [MPa]	-72,00
$\sigma_{s4}$ [MPa]	18,00
$\sigma_{s5}$ [MPa]	72,00
$\sigma_{s6}$ [MPa]	72,00

Naprezanja u karakterističnim točkama od bimomenta B	
$\sigma_u = \frac{B}{I_\omega} \cdot \omega$	
$\sigma_{u1}$ [MPa]	151,46
$\sigma_{u2}$ [MPa]	40,69
$\sigma_{u3}$ [MPa]	-53,50
$\sigma_{u4}$ [MPa]	-151,46
$\sigma_{u5}$ [MPa]	-40,69
$\sigma_{u6}$ [MPa]	53,50

Ukupna naprezanja u karakterističnim točkama

$$\sigma = \sum \sigma$$

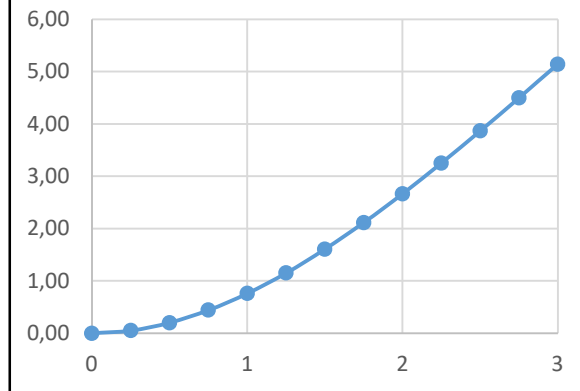
$\sigma_1$ [MPa]	133,46
$\sigma_2$ [MPa]	-31,31
$\sigma_3$ [MPa]	-125,50
$\sigma_4$ [MPa]	-133,46
$\sigma_5$ [MPa]	31,31
$\sigma_6$ [MPa]	125,50

Progib štapa

$$w_s = \frac{F \cdot x^2}{6 \cdot E \cdot I_{yo}} \cdot (3 \cdot l - x)$$

x [m]	$w_s$ [mm]
0	0,00
0,25	0,05
0,5	0,20
0,75	0,44
1	0,76
1,25	1,15
1,5	1,61
1,75	2,11
2	2,67
2,25	3,25
2,5	3,87
2,75	4,50
3	5,14

Progib od savijanja  $w_s$  [mm]

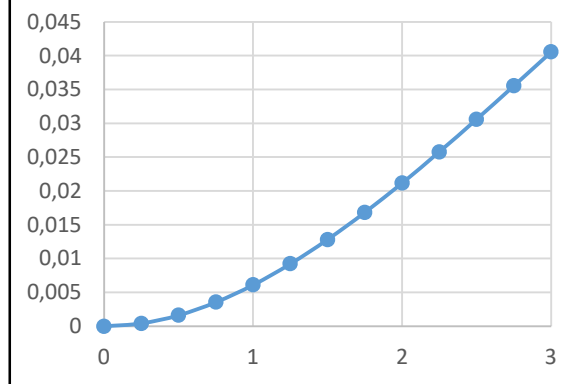


Kut uvijanja

$$\alpha = \frac{M_t \cdot l^3}{E \cdot I_{\omega} \cdot k^2} \cdot \left[ \frac{x}{l} - \frac{1}{k} \cdot \operatorname{sh} k \frac{x}{l} - \frac{\operatorname{th} k}{k} \left( 1 - \operatorname{ch} k \frac{x}{l} \right) \right]$$

x [m]	$\alpha$ [rad]
0	0
0,25	0,00042
0,5	0,00164
0,75	0,00357
1	0,00612
1,25	0,00924
1,5	0,01283
1,75	0,01684
2	0,02118
2,25	0,02579
2,5	0,03061
2,75	0,03556

Kut uvijanja  $\alpha$  [rad]



3	0,04057
---	---------

Progib od uvijanja	
$w_u = \alpha \cdot ( \Delta y  + y_i)$	
$\alpha$ [rad]	$w_u$ [mm]
0	0
0,00042	0,06
0,00164	0,24
0,00357	0,52
0,00612	0,89
0,00924	1,35
0,01283	1,87
0,01684	2,46
0,02118	3,09
0,02579	3,77
0,03061	4,47
0,03556	5,19
0,04057	5,93

Ukupni progib	
$w = w_s + w_u$	
$w$ [mm]	
	11,07

