

# PRIMJENA METODE SILA I METODE POMAKA NA PRORAČUN OKVIRNOG NOSAČA

---

**Čaktaš, Slavko**

**Graduate thesis / Diplomski rad**

**2023**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Split / Sveučilište u Splitu**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:228:943448>

*Rights / Prava:* [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-08-06**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of University Department of Professional Studies](#)



UNIVERSITY OF SPLIT



**SVEUČILIŠTE U SPLITU**  
**SVEUČILIŠNI ODJEL ZA STRUČNE STUDIJE**

Specijalistički diplomski stručni studij Strojarsvo

**Slavko Caktaš**

**ZAVRŠNI RAD**

**PRIMJENA METODE SILA I METODE POMAKA NA  
PRORAČUN OKVIRNOG NOSAČA**

Split, rujan 2023.

**SVEUČILIŠTE U SPLITU**  
**SVEUČILIŠNI ODJEL ZA STRUČNE STUDIJE**

Specijalistički diplomski stručni studij Strojarsvo

**Predmet:** Čvrstoća konstrukcija

**Z A V R Š N I R A D**

**Kandidat:** Slavko Caktaš

**Naslov rada:** Primjena metode sila i metode pomaka na proračun okvirnog nosača

**Mentor:** Dr. sc. Ado Matoković, profesor stručnog studija u trajnom izboru

Split, rujan 2023.

**REPUBLIKA HRVATSKA**  
**SVEUČILIŠTE U SPLITU**  
**Sveučilišni odjel za stručne studije**

**Studij:** Strojarstvo  
**Predmet:** Čvrstoća konstrukcija  
**Nastavnik:** Dr. sc. Ado Matoković, profesor stručnog studija u trajnom izboru

## **ZADATAK**

**Kandidat:** Slavko Caktaš

**Zadatak:** Primjena metode sila i metode pomaka na proračun okvirnog nosača

U radu je potrebno:

- kratko opisati metodu sila i metodu pomaka na jednostavnim primjerima;
- primjer 1. riješiti metodom sila;
- primjer 2 riješiti metodom sila;
- primjer 2. riješiti metodom pomaka;
- kratko opisati programski paket 2D Frame Analysis;
- rezultate primjera 1. i 2. usporediti s rezultatima dobivenim korištenjem programskog paketa 2D Frame Analysis.

## Sažetak

U uvodnom dijelu završnog rada pod nazivom „Primjena metode sila i metode pomaka na proračun okvirnog nosača“ na nekim jednostavnijim primjerima prikazan je postupak rješavanja metode sila i metode pomaka, te osnovne razlike između tih metoda. U nastavku rada je riješen jedanput statički neodređen okvirni nosač s zglobom primjenom metode sila. Zatim je radi usporedbe riješen okvirni nosač sa jednakim duljinama, modulima elastičnosti te vanjskim opterećenjima i osloncima, uz jednu preinaku gdje je umjesto zgloba umetnut kutni zavar. Taj zadatak je riješen pomoću metode sila gdje je bio dva puta statički neodređen, te nakon toga pomoću metode pomaka gdje je bio tri puta kinematički neodređen. U posljednjem dijelu završnog rada je izvršena provjera dobivenih dijagrama i rezultata koristeći se programskim paketom 2D Frame Analysis.

Ključne riječi: metoda sila, metoda pomaka, okvirni nosač.

## Summary (Application of the force method and displacement method to the calculation of the frame beam)

In the introductory part of the final paper entitled "Application of the force method and displacement method to the calculation of the frame beam" on some simple examples the procedure of solving the force method and displacement method, and the basic differences between these methods are presented. In the continuation of the work, a statically indeterminate frame beam with a joint was solved once using the force method. Then, for comparison, a frame beam with equal lengths, modulus of elasticity and external loads and supports was solved, with one modification where an angular weld was inserted instead of the joint. This problem was solved using the force method where it was twice statically indeterminate, and then using the displacement method where it was three times kinematically indeterminate. In the last part of the final paper, the obtained diagrams and results were checked using the 2D Frame Analysis software package.

Keywords: force method, displacement method, frame beam.

**SADRŽAJ**

Sažetak .....	ii
1. Uvod.....	1
1.1. Metoda sila .....	4
1.2. Metoda pomaka .....	13
1.3. Usporedba metode sila i metode pomaka .....	23
2. Proračun jedanput statički neodređenog okvirnog nosača metodom sila .....	24
3. Proračun dvaput statički neodređenog okvirnog nosača metodom sila .....	33
4. Proračun triput kinematički neodređenog okvirnog nosača metodom pomaka.....	43
5. Programski paket 2D Frame Analysis .....	57
6. Zaključak.....	62
Literatura .....	63
Prilozi .....	64

## Popis slika

Slika 1.1 – Statički jedanput neodređena konstrukcija s prikazom svih unutarnjih sila i vanjske sile .....	2
Slika 1.2 – Linijski nosač kinematički jedanput neodređen .....	2
Slika 1.3 – Okvirni nosač s krutim vezama .....	3
Slika 1.4 – Lokalni koordinatni sustavi okvirnog nosača .....	5
Slika 1.5 – Jednostavan okvirni nosač (metoda sila) .....	5
Slika 1.6 – Jednostavan okvirni nosač s nepoznatim reakcijama $X_1$ i $X_2$ .....	5
Slika 1.7 – Dijagrami momenta savijanja $M_{y,F}$ okvirnog nosača uslijed vanjskog opterećenja .....	6
Slika 1.8 – Dijagrami momenta savijanja uslijed djelovanja jediničnih reakcija $X_1=1$ i $X_2=1$ .....	6
Slika 1.9 – Dio okvirnog nosača AC (poprečne sile) .....	8
Slika 1.10 – Presjek nosača AC za određivanje ekstrema .....	9
Slika 1.11 – Dio okvirnog nosača CB (poprečne sile) .....	10
Slika 1.12 – Dio okvirnog nosača AC (uzdužne sile) .....	11
Slika 1.13 – Dio okvirnog nosača CB (uzdužne sile) .....	11
Slika 1.14 – Dijagrami unutarnjih opterećenja okvirnog nosača metodom sila .....	12
Slika 1.15 – Jednostavan okvirni nosač (metoda pomaka) .....	14
Slika 1.16 – Jednostavan okvirni nosač s uklještenjem u čvoru C .....	14
Slika 1.17 – Dijagram momenta savijanja $M_{y,F}$ okvirnog nosača uslijed vanjskog opterećenja .....	15
Slika 1.18 – Dijagram okvirnog nosača uslijed jediničnog opterećenja $Z_1$ .....	15
Slika 1.19 – Koeficijent krutosti $k_{I1}$ u čvoru C .....	16
Slika 1.20 – Slobodni član $Q_{IF}$ u čvoru C .....	16
Slika 1.21 – Dio okvirnog nosača AC (poprečne sile) .....	18
Slika 1.22 – Presjek nosača AC za određivanje ekstrema .....	19
Slika 1.23 – Dio okvirnog nosača CB (poprečne sile) .....	20
Slika 1.24 – Dio okvirnog nosača AC (uzdužne sile) .....	21
Slika 1.25 – Dio okvirnog nosača CB (uzdužne sile) .....	21
Slika 1.26 – Dijagrami unutarnjih opterećenja okvirnog nosača metodom pomaka .....	22
Slika 2.1 – Statički neodređen okvirni nosač (metoda sila) .....	24
Slika 2.2 – Okvirni nosač s jediničnom reakcijom $X_1$ .....	25
Slika 2.3 – Dijagram momenta savijanja okvirnog nosača uslijed jedinične reakcije $X_1$ .....	26

Slika 2.4 – Dijagram momenta savijanja okvirnog nosača uslijed vanjskih reakcija .....	26
Slika 2.5 – Dio okvirnog nosača AB (poprečne sile) .....	28
Slika 2.6 – Dio okvirnog nosača BD (poprečne sile) .....	28
Slika 2.7 – Dio okvirnog nosača DE (poprečne sile) .....	29
Slika 2.8 – Presjek nosača DE za određivanje ekstrema .....	30
Slika 2.9 – Presjek na mjestu B (a) i presjek na mjestu D (b) (uzdužne sile) .....	31
Slika 2.10 – Dijagrami unutarnjih opterećenja okvirnog nosača metodom sila .....	32
Slika 3.1 – Dvapat statički neodređen okvirni nosač (metoda sila) .....	33
Slika 3.2 – Okvirni nosač s jediničnim reakcijama $X_1$ i $X_2$ .....	34
Slika 3.3 – Dijagrami momenta savijanja uslijed djelovanja jediničnih reakcija $X_1=1$ i $X_2=1$ .....	34
Slika 3.4 – Dijagrami momenta savijanja okvirnog nosača uslijed vanjskih reakcija .....	35
Slika 3.5 – Dio okvirnog nosača AB (poprečne sile) .....	37
Slika 3.6 – Dio okvirnog nosača BD (poprečne sile) .....	38
Slika 3.7 – Dio okvirnog nosača DE (poprečne sile) .....	39
Slika 3.8 – Presjek nosača DE za određivanje ekstrema .....	40
Slika 3.9 – Presjek na mjestu B (a) i presjek na mjestu D (b) (uzdužne sile) .....	41
Slika 3.10 – Dijagrami unutarnjih opterećenja okvirnog nosača metodom sila .....	42
Slika 4.1 – Kinematički neodređen okvirni nosač (metoda pomaka) .....	43
Slika 4.2 – Okvirni nosač s uklještenjima u B i D te linearni pomak mjesta D .....	44
Slika 4.3 – Dijagram okvirnog nosača uslijed djelovanja jediničnih opterećenja $Z_1$ , $Z_2$ i $Z_3$ .....	45
Slika 4.4 – Dijagram okvirnog nosača uslijed djelovanja vanjskih zadanih opterećenja .....	45
Slika 4.5 – Koeficijent krutosti $k_{11}$ u čvoru B .....	46
Slika 4.6 – Koeficijent krutosti $k_{12}$ u čvoru B .....	46
Slika 4.7 – Koeficijent krutosti $k_{13}$ u čvoru B .....	47
Slika 4.8 – Koeficijent krutosti $k_{22}$ u čvoru D .....	47
Slika 4.9 – Koeficijent krutosti $k_{23}$ u čvoru D .....	48
Slika 4.10 – Koeficijent krutosti $k_{33}$ na mjestu D uzrokovan translacijskim pomakom konstrukcije .....	48
Slika 4.11 – Slobodni član $Q_{1F}$ u čvoru B .....	49
Slika 4.12 – Slobodni član $Q_{2F}$ u čvoru D .....	49
Slika 4.13 – Slobodni član $Q_{3F}$ na mjestu D uzrokovan translacijskim pomakom konstrukcije .....	50
Slika 4.14 – Rezultati dobiveni unošenjem tri jednadžbe s tri nepoznanice .....	50



Slika 4.15 – Dio okvirnog nosača AB (poprečne sile).....	52
Slika 4.16 – Dio okvirnog nosača BD (poprečne sile).....	52
Slika 4.17 – Dio okvirnog nosača DE (poprečne sile).....	53
Slika 4.18 – Presjek nosača DE za određivanje ekstrema.....	54
Slika 4.19 – Presjek na mjestu B (a) i presjek na mjestu D (b) (uzdužne sile) .....	55
Slika 4.20 – Dijagrami unutarnjih opterećenja okvirnog nosača metodom pomaka .....	56
Slika 5.1 – Prikaz glanog izbornika programskog paketa 2D Frame Analysis.....	57
Slika 5.2 – Izbornik za odabir materijala od kojeg će konstrukcija ili njezin segment biti izrađen.....	57
Slika 5.3 – Alatna traka sa prikazom mogućnosti odabira oslonaca, sila, momenata.....	58
Slika 5.4 – Prikaz okvirnog nosača u 2D Frame Analysisu .....	58
Slika 5.5 – Reakcije u osloncima .....	59
Slika 5.6 – Deformacija okvirnog nosača uzrokovana djelovanjem vanjskih opterećenja .....	59
Slika 5.7 – Prikaz uzdužnih sila u 2D Frame Analysisu .....	60
Slika 5.8 – Prikaz poprečnih sila u 2D Frame Analysisu.....	60
Slika 5.9 – Prikaz momenata savijanja u 2D Frame Analysisu .....	61

**Popis tablica**

Tablica 1.1 – Prikaz koncepta proračuna za metodu sila i metodu pomaka [4].....	23
---	----

**Popis oznaka**

Oznaka	Opis
F	sila [N]
q	kontinuirano opterećenje [kN/m]
L	duljina [mm]
N	unutarnja uzdužna sila [N]
Q <sub>z</sub>	unutarnja poprečna sila [N]
M <sub>y</sub>	Unutarnji moment savijanja [Nm]
$\alpha$	kut, nagib [°]
E	Young-ov modul elastičnosti [GPa]
I <sub>y</sub>	aksijalni moment tromosti (otpora) [mm <sup>4</sup> ]
n	broj nepoznatih reakcija veze
k	broj jednadžbi ravnoteže
s	stupanj statičke neodređenosti
N <sub><math>\Delta</math></sub>	linearni pomak krutih čvorova
N <sub><math>\varphi</math></sub>	kutni pomak krutih čvorova
N	stupanj kinematičke neodređenosti
f <sub>ij</sub>	koeficijent podatnosti na mjestu <b>i</b> zbog djelovanja opterećenja na mjestu <b>j</b>
q <sub>1F</sub>	slobodni član u metodi sila
X <sub>1</sub>	jedinična nepoznanica u metodi sila [kN]
k <sub>ij</sub>	koeficijent krutosti na mjestu <b>i</b> zbog djelovanja opterećenja na mjestu <b>j</b>
Q <sub>1F</sub>	slobodni član u metodi pomaka
Z <sub>1</sub>	jedinična nepoznanica u metodi pomaka [kNm]

## 1. Uvod

Za rješavanje statički i kinematički neodređenih zadataka koriste se metoda sila i metoda pomaka. Spomenute metode će biti objašnjene nakon prethodno objašnjenih pojmova statičke i kinematičke neodređenosti, te okvirnog nosača. Kada je u zadacima broj uvjeta ravnoteže jednak broju nepoznatih reakcija, takvi se zadatci tada nazivaju statički određenima. Kada je u zadacima broj uvjeta ravnoteže manji od broja nepoznatih reakcija, tada se takvi zadatci nazivaju statički neodređenima. Za određivanje stupnja statičke neodređenosti, odnosno broja koliko je puta statički zadatak neodređen koristi se izraz u kojem je:

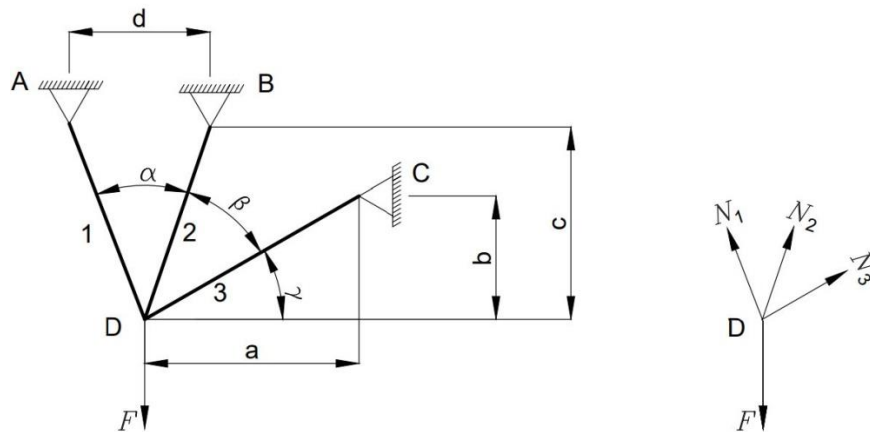
- $n$  – broj nepoznatih reakcija veza;
- $k$  - broj jednadžbi ravnoteže;
- $s$  – stupanj statičke neodređenosti.

Izraz je:

$$s = n - k \quad (1.1)$$

gdje se pojavljuju tri slučaja:

1.  $s < 0$  - broj nepoznanica manji je od broja jednadžbi – promatrana konstrukcija je mehanizam sa  $|s|$  stupnjeva slobode gibanja;
2.  $s = 0$  - broj nepoznanica jednak je broju jednadžbi – zadatak je statički određen;
3.  $s > 0$  - broj nepoznanica veći je od broja jednadžbi – zadatak je statički neodređen i to za  $s$  puta [1].



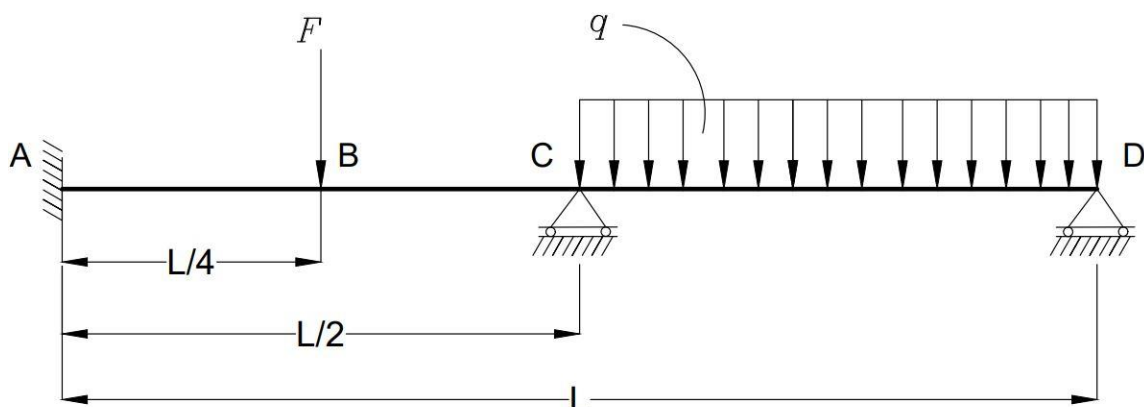
Slika 1.1 – Statički jedanput neodređena konstrukcija s prikazom svih unutarnjih sila i vanjske sile

Kod sustava štapova kinematička neodređenost je nepoznati pomak štapova u krajevima, tj. kutni i/ili linearni pomaci. Za određivanje stupnja kinematičke neodređenosti, odnosno broja koliko je puta kinematički zadatak neodređen koristi se izraz u kojem je:

- $N_{\Delta}$  – linearni pomak krutih čvorova;
- $N_{\varphi}$  – kutni pomak krutih čvorova;
- $N$  – stupanj kinematičke neodređenosti [2].

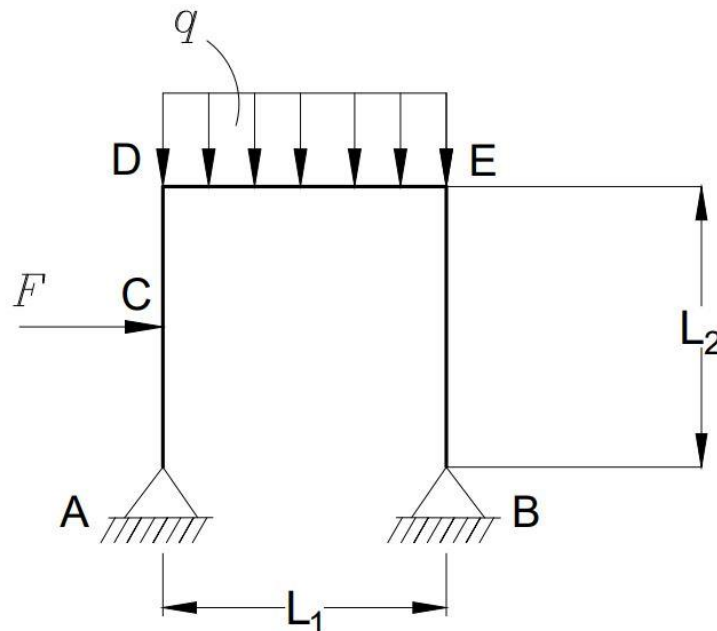
Izraz je:

$$N = N_{\Delta} + N_{\varphi} \quad (1.2)$$



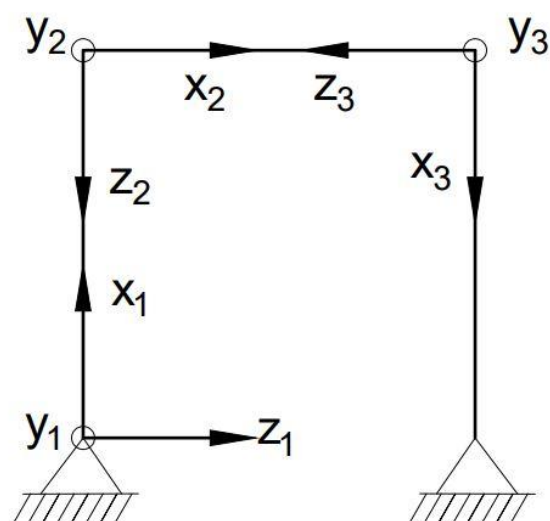
Slika 1.2 – Linijski nosač kinematički jedanput neodređen

Ravninski okvirni nosači su puni nosači sastavljeni od više jednostavnih nosača međusobno vezanih pod nekim kutom, bilo čvrstim bilo zglobnim vezama tako da osi svih tih dijelova leže u jednoj ravnini u kojoj leži i opterećenje okvira [1].



Slika 1.3 – Okvirni nosač s krutim vezama

Kod okvirnih nosača treba voditi računa o lokalnim koordinatnim sustavima, prikazanim na sljedećoj slici (Slika 1.4).



Slika 1.4 – Lokalni koordinatni sustavi okvirnog nosača

## 1.1. Metoda sila

Metoda sila koristi se za rješavanje statički neodređenih zadataka. U prvom koraku utvrđuje se koliko puta je zadatak statički neodređen. Zatim se iz zadane konstrukcije uklanjaju suviše veza te se formira ekvivalentna statički određena konstrukcija (osnovna konstrukcija). Potom se određuju unutarnje sile za osnovnu konstrukciju uslijed vanjskog opterećenja kao i unutarnje sile od jedinične poopćene sile/jediničnih poopćenih sila. Postavlja se onoliko jednadžbi koliko puta je zadatak statički neodređen. Te se jednadžbe nazivaju kanonske jednadžbe metode sila. Njihovim rješavanjem određuju se nepoznate sile ili momenti. Konačni dijagrami unutarnjih sila dobiju se zbrajanjem dijagrama za osnovnu konstrukciju uslijed vanjskog opterećenja i dijagrama unutarnjih sila za osnovnu konstrukciju uslijed jediničnih poopćenih sila pomnoženih s vrijednostima dobivenim za nepoznate poopćene sile. Za jedanput statički neodređenu konstrukciju osnovna (kanonska) jednadžba metode sila glasi:

$$f_{11} \cdot X_1 + q_{1F} = 0. \quad (1.3)$$

gdje je  $f_{11}$  koeficijent podatnosti, a  $q_{1F}$  slobodni član, dok za dva puta statički neodređenu konstrukciju kanonske jednadžbe metode sila glase:

$$\begin{cases} f_{11} \cdot X_1 + f_{12} \cdot X_2 + q_{1F} = 0 \\ f_{21} \cdot X_1 + f_{22} \cdot X_2 + q_{2F} = 0 \end{cases} \quad (1.4)$$

Za određivanje navedenih koeficijenata koristit će se Mohrov integral i Vereščaginovo pravilo o određenom integralu produkta dviju funkcija od kojih barem jedna mora biti linearna. Jednadžba (1.4) može se zapisati u matičnom zapisu:

$$\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} q_{1F} \\ q_{2F} \end{Bmatrix}. \quad (1.5)$$

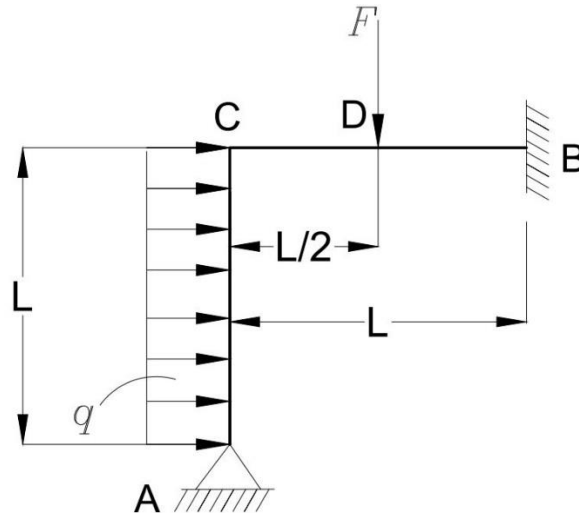
Prvi član na lijevoj strani je matrica podatnosti, drugi član je vektor nepoznanica, a član na desnoj strani jednadžbe je vektor slobodnih članova [2].

Metoda sila biti će objašnjena na jednostavnom primjeru okvirnog nosača.

Zadan je okvirni nosač (Slika 1.5) sa sljedećim ulaznim parametrima:

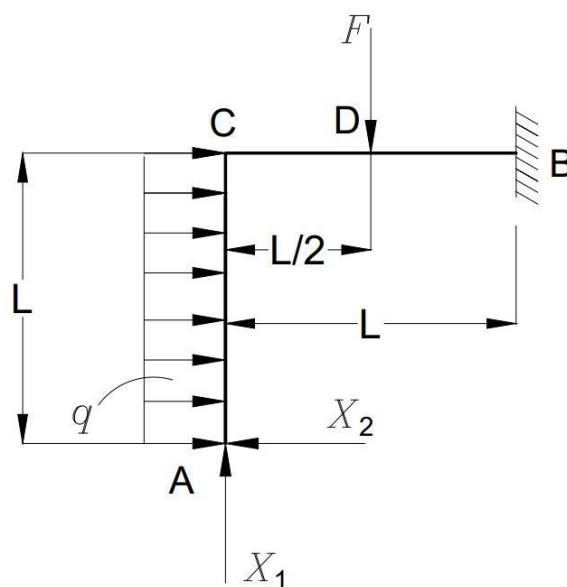
$$L = 2 \text{ m}; q = 5 \text{ kN/m};$$

$$F = 8 \text{ kN}; E, I_y.$$



Slika 1.5 – Jednostavan okvirni nosač (metoda sila)

Prema jednadžbi (1.1), zadatak je dva puta statički neodređen, tj. u osloncu na mjestu A su nepoznate dvije unutarnje sile, dok u uklještenju na mjestu B uz dvije nepoznate unutarnje sile je nepoznat i moment, a moguće je postavljanje tri uvjeta ravnoteže. Prvi korak za rješavanje ovog zadatka je uklanjanje suvišnih veza u osloncu na mjestu A i postavljanje nepoznatih reakcija  $X_1$  i  $X_2$  (Slika 1.6).



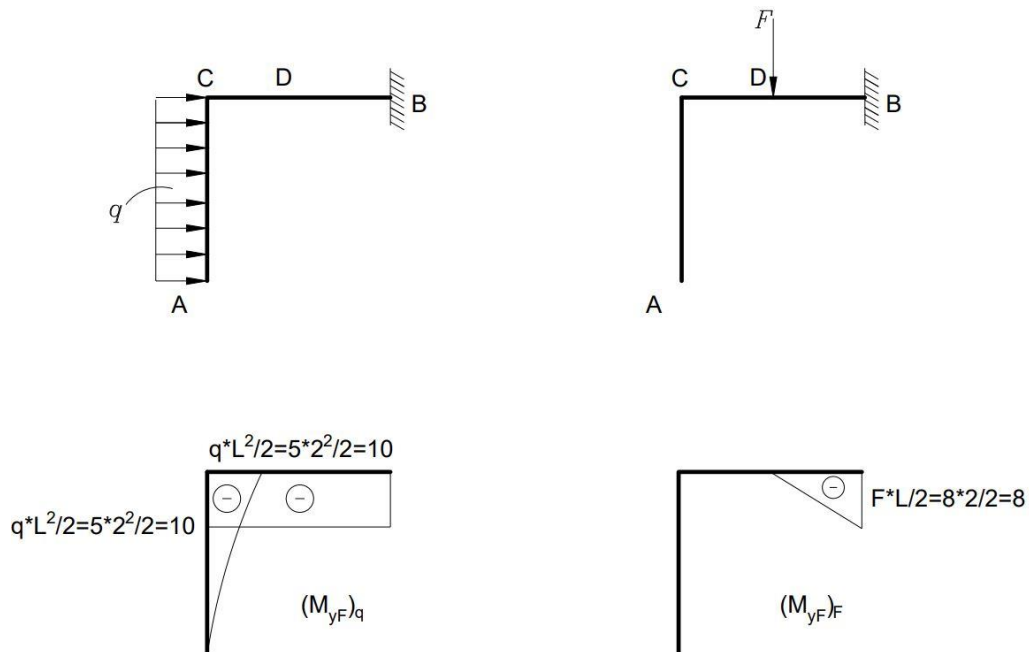
Slika 1.6 – Jednostavan okvirni nosač s nepoznatim reakcijama  $X_1$  i  $X_2$



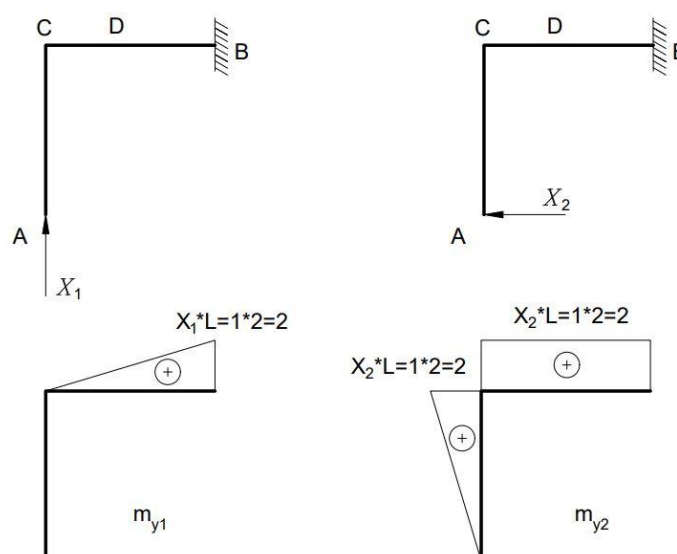
Kanonska jednadžba za dva puta statički neodređen zadatak je prema (1.4):

$$\begin{aligned} f_{11} \cdot X_1 + f_{12} \cdot X_2 + q_{1F} &= 0 \\ f_{21} \cdot X_1 + f_{22} \cdot X_2 + q_{2F} &= 0 \end{aligned}$$

Sljedeći korak je određivanje dijagrama uslijed zadanih vanjskih opterećenja (Slika 1.7), te dijagram za  $X_1 = 1$  i  $X_2 = 1$  (Slika 1.8).



Slika 1.7 – Dijagrami momenta savijanja  $M_{y,F}$  okvirnog nosača uslijed vanjskog opterećenja



Slika 1.8 – Dijagrami momenta savijanja uslijed djelovanja jediničnih reakcija  $X_1 = 1$  i  $X_2 = 1$

Koeficijenti podatnosti i slobodni članovi se određuju koristeći Mohrov integral, te Vereščaginovo pravilo:

$$f_{11} = \frac{1}{E \cdot I_y} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot L \cdot L \cdot \frac{2}{3} \cdot L \right) = \frac{1}{E \cdot I_y} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \right) = \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{E \cdot I_y};$$

$$f_{12} = \frac{1}{E \cdot I_y} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot L \cdot L \cdot L \right) = \frac{1}{E \cdot I_y} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \right) = 4 \cdot \frac{1}{E \cdot I_y} = f_{21};$$

$$f_{22} = \frac{1}{E \cdot I_y} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot L \cdot L \cdot \frac{2}{3} \cdot L + L \cdot L \cdot L \right) = \frac{1}{E \cdot I_y} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + 2 \cdot 2 \cdot 2 \right) = \frac{32}{3} \cdot \frac{1}{E \cdot I_y};$$

$$q_{1F} = \frac{1}{E \cdot I_y} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{L}{2} \cdot (-8) \cdot \frac{5}{6} \cdot L + L \cdot (-10) \cdot \frac{1}{2} \cdot L \right)$$

$$q_{1F} = \frac{1}{E \cdot I_y} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{2} \cdot (-8) \cdot \frac{5}{6} \cdot 2 + 2 \cdot (-10) \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \right) = -\frac{80}{3} \cdot \frac{1}{E \cdot I_y};$$

$$q_{2F} = \frac{1}{E \cdot I_y} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{L}{2} \cdot (-8) \cdot L + L \cdot (-10) \cdot L + \frac{1}{3} \cdot L \cdot (-10) \cdot \frac{3}{4} \cdot L \right)$$

$$q_{2F} = \frac{1}{E \cdot I_y} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{2} \cdot (-8) \cdot 2 + 2 \cdot (-10) \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot (-10) \cdot \frac{3}{4} \cdot 2 \right) = -58 \cdot \frac{1}{E \cdot I_y}.$$

Uvrštavanjem u kanonske jednadžbe se dobije:

$$\frac{8}{3} \cdot \frac{1}{E \cdot I_y} \cdot X_1 + 4 \cdot \frac{1}{E \cdot I_y} \cdot X_2 - \frac{80}{3} \cdot \frac{1}{E \cdot I_y} = 0; \quad / \cdot E \cdot I_y$$

$$4 \cdot \frac{1}{E \cdot I_y} \cdot X_1 + \frac{32}{3} \cdot \frac{1}{E \cdot I_y} \cdot X_2 - 58 \cdot \frac{1}{E \cdot I_y} = 0; \quad / \cdot E \cdot I_y$$

$$\frac{8}{3} \cdot X_1 + 4 \cdot X_2 = \frac{80}{3}; \quad / \cdot 9$$

$$4 \cdot X_1 + \frac{32}{3} \cdot X_2 = 58; \quad / \cdot (-6)$$

$$24 \cdot X_1 + 36 \cdot X_2 = 240;$$

$$-24 \cdot X_1 - 64 \cdot X_2 = -348;$$

$$-28 \cdot X_2 = -108 \quad / : (-28) \Rightarrow X_2 = \frac{27}{7} = 3,8571.$$

Uvrštavanjem dobivene vrijednosti  $X_2$  za određivanje nepoznanice  $X_1$  dobije se:

$$24 \cdot X_1 + 36 \cdot \frac{27}{7} = 240 \Rightarrow X_1 = \frac{59}{14} = 4,2143.$$

Za određivanje momenta savijanja u karakterističnim točkama koristi se sljedeća jednačba:

$$M_{y,T} = m_{y,1} \cdot X_1 + m_{y,2} \cdot X_2 + M_{y,F}.$$

U karakterističnim točkama su dobivene sljedeće vrijednosti momenta savijanja:

$$M_{y,A} = 0 \cdot 4,2143 + 0 \cdot 3,8571 + 0 = 0 \text{ kN} \cdot \text{m};$$

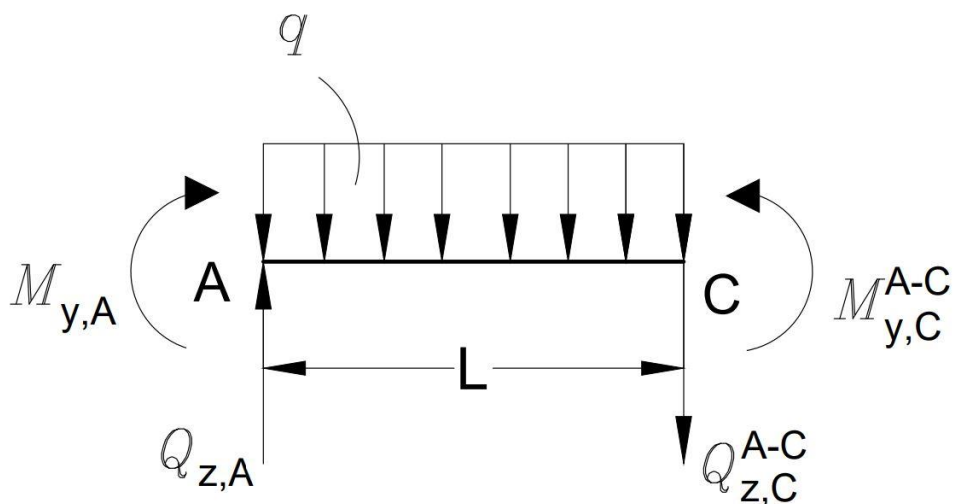
$$M_{y,B} = 2 \cdot 4,2143 + 2 \cdot 3,8571 - 10 - 8 = -1,86 \text{ kN} \cdot \text{m};$$

$$M_{y,C}^{A-C} = 0 \cdot 4,2143 + 2 \cdot 3,8571 - 10 = -2,29 \text{ kN} \cdot \text{m};$$

$$M_{y,C}^{C-B} = 0 \cdot 4,2143 + 2 \cdot 3,8571 - 10 = -2,29 \text{ kN} \cdot \text{m};$$

$$M_{y,D} = 1 \cdot 4,2143 + 2 \cdot 3,8571 - 10 = 1,93 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$

Sada kada su poznati momenti savijanja može se pristupiti određivanju poprečnih sila.



Slika 1.9 – Dio okvirnog nosača AC (poprečne sile)

Koristeći uvjete ravnoteže za dio okvirnog nosača AC poprečne sile se određuju na sljedeći način:

$$\sum M_A = 0:$$

$$-M_{y,A} + M_{y,C}^{A-C} - q \cdot L \cdot \frac{L}{2} - Q_{z,C}^{A-C} \cdot L = 0$$

$$-0 - 2,29 - 5 \cdot 2 \cdot \frac{2}{2} - Q_{z,C}^{A-C} \cdot 2 = 0$$

$$2 \cdot Q_{z,C}^{A-C} = -12,29 \Rightarrow Q_{z,C}^{A-C} = -6,15 \text{ kN};$$

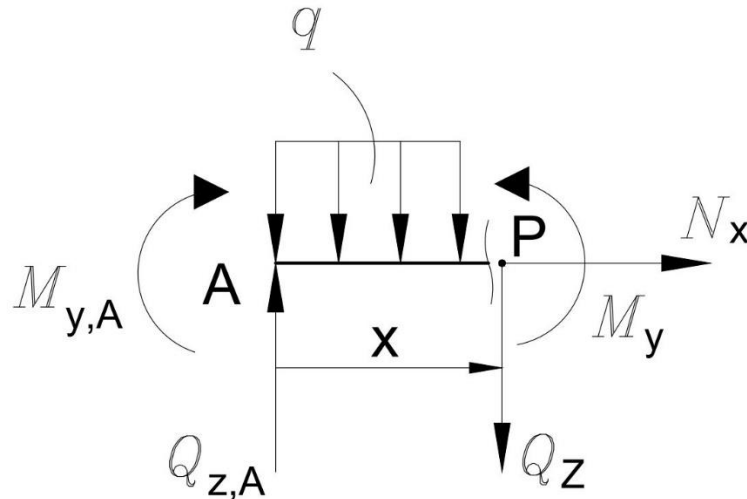
$$\sum F_z = 0:$$

$$-Q_{z,A} + Q_{z,C}^{A-C} + q \cdot L = 0$$

$$-Q_{z,A} - 6,15 + 5 \cdot 2 = 0$$

$$Q_{z,A} = 3,85 \text{ kN}.$$

Iz dobivenih poprečnih sila vidljivo je da postoji lokalni ekstrem, a on se izračuna presijecanjem na nekom proizvoljno odabranom području (x) u nosaču AC.



Slika 1.10 – Presjek nosača AC za određivanje ekstrema

$$\sum F_z = 0:$$

$$Q_z - Q_{z,A} + q \cdot x = 0$$

$$Q_z - 3,85 + 5 \cdot x = 0$$

$$Q_z = 3,85 - 5 \cdot x.$$

Najveći moment u nosaču AC biti će ostvaren kada je poprečna sila jednaka nuli ( $Q_z = 0$ ), pa iz ovoga slijedi da udaljenost ( $x$ ) od početka nosača do ekstrema iznosi:

$$Q_z = 3,85 - 5 \cdot x \Rightarrow 5 \cdot x = 3,85 \Rightarrow x = 0,77 \text{ m.}$$

$$\sum M_p = 0:$$

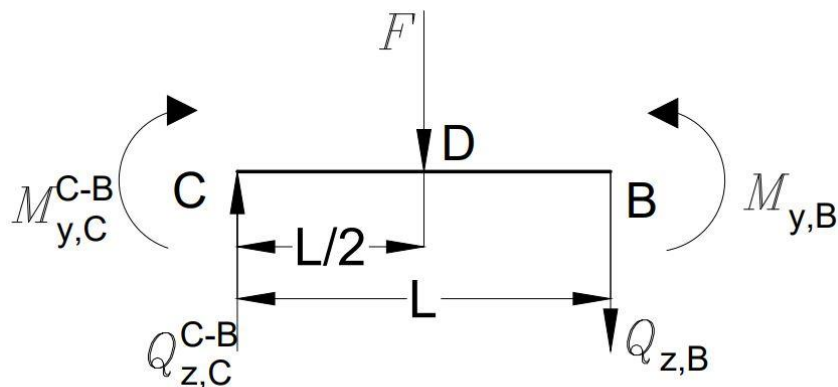
$$M_y - M_{y,A} - Q_{z,A} \cdot x + q \cdot \frac{x^2}{2} = 0$$

$$M_y = -2,5 \cdot x^2 + 3,85 \cdot x$$

$$M_{y(\max)} \text{ za } x=0,77 \text{ m} \Rightarrow -2,5 \cdot 0,77^2 + 3,85 \cdot 0,77$$

$$M_{y(\max)} = 1,48 \text{ kN} \cdot \text{m.}$$

Koristeći uvjete ravnoteže za dio okvirnog nosača CB poprečne sile se određuju na sljedeći način:



Slika 1.11 – Dio okvirnog nosača CB (poprečne sile)

$$\sum M_C = 0:$$

$$M_{y,B} - M_{y,C}^{C-B} - F \cdot \frac{L}{2} - Q_{z,B} \cdot L = 0$$

$$-1,86 + 2,29 - 8 \cdot \frac{2}{2} - Q_{z,B} \cdot 2 = 0$$

$$2 \cdot Q_{z,B} = -7,57 \Rightarrow Q_{z,B} = -3,79 \text{ kN};$$

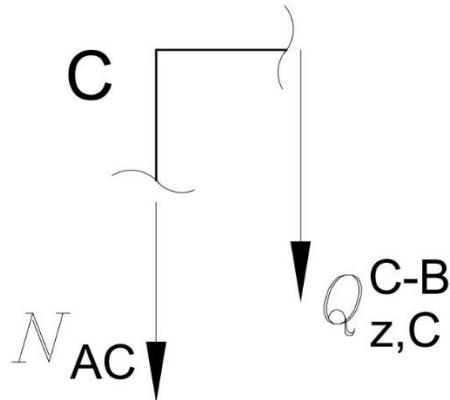
$$\sum F_z = 0:$$

$$Q_{z,B} - Q_{z,C}^{C-B} + F = 0$$

$$-3,79 - Q_{z,C}^{C-B} + 8 = 0$$

$$Q_{z,C}^{C-B} = 4,22 \text{ kN} .$$

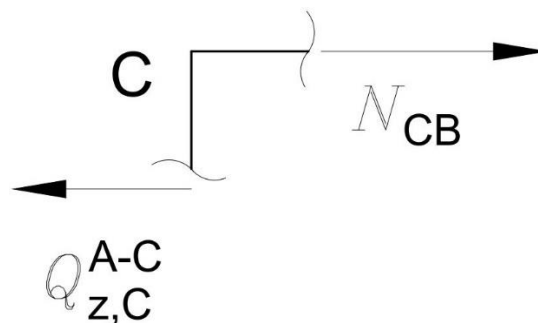
Uzdužne sile se mogu izračunati iz čvora C:



Slika 1.12 – Dio okvirnog nosača AC (uzdužne sile)

$$\sum F_z = 0:$$

$$N_{AC} + Q_{z,C}^{C-B} = 0 \Rightarrow N_{AC} = -Q_{z,C}^{C-B} = -4,22 \text{ kN};$$

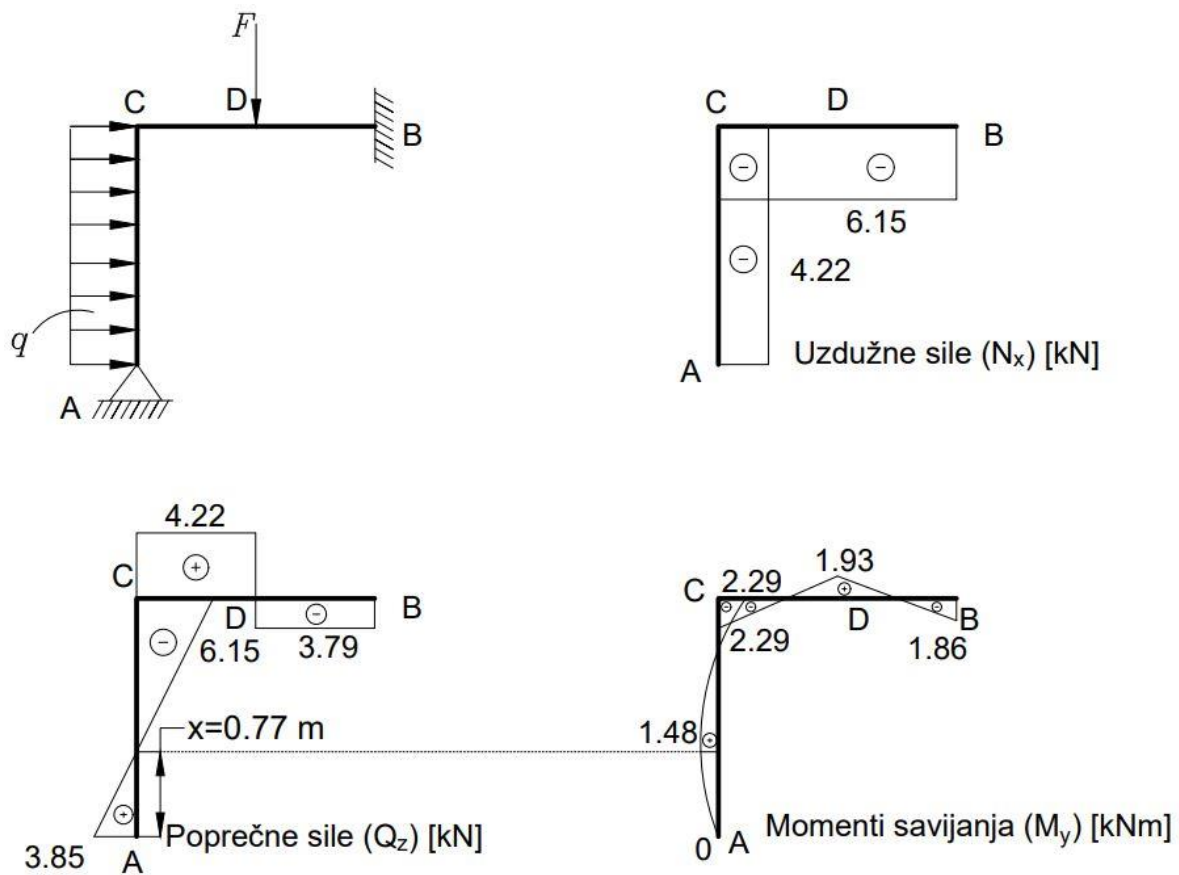


Slika 1.13 – Dio okvirnog nosača CB (uzdužne sile)

$$\sum F_x = 0:$$

$$N_{CB} - Q_{z,C}^{A-C} = 0 \Rightarrow N_{CB} = Q_{z,C}^{A-C} = -6,15 \text{ kN} .$$

Posljednji korak u zadatku je nacrtati dijagrame unutarnjih opterećenja (uzdužne sile, poprečne sile i momenti savijanja).



Slika 1.14 – Dijagrami unutarnjih opterećenja okvirnog nosača metodom sila

## 1.2. Metoda pomaka

Metoda pomaka je metoda proračuna statičkih sustava kojima su nepoznanice translacijski i rotacijski pomaci odabranih točaka. Točke u kojima se proračunavaju nepoznanice nazivaju se čvorovima. Čvor  $i$  u ravnini ima 3 dozvoljena pomaka, a to su dva translacijska pomaka (jedan u smjeru osi  $x$ , jedan u smjeru osi  $y$ ) i jedan rotacijski pomak (oko osi okomite na ravninu). Čvorove spojene s podlogom u kojima su pomaci spriječeni ili zadani nazivamo ležajnim čvorovima, a one u kojima se spaja više elemenata, te nisu spriječeni pomaci, nazivamo slobodnim čvorovima. Metoda pomaka pripada u metode čvorova jer uvjete ravnoteže zadovoljava izražavajući sile pomacima. Njom se mogu, osim statički neodređenih sustava, proračunavati i statički određeni sustavi. Primjena metode vrlo je široka, te je vrlo važna i za druge grane građevinarstva kao što su geomehanika i hidrotehnika. [3]

Za jedanput kinematički neodređenu konstrukciju osnovna (kanonska) jednačba metode pomaka glasi:

$$k_{11} \cdot Z_1 + Q_{1F} = 0. \quad (1.6)$$

gdje je  $k_{11}$  koeficijent krutosti, a  $Q_{1F}$  slobodni član, dok za dva puta kinematički neodređenu konstrukciju kanonske jednačbe metode pomaka glase:

$$\begin{aligned} k_{11} \cdot Z_1 + k_{12} \cdot Z_2 + Q_{1F} &= 0 \\ k_{21} \cdot Z_1 + k_{22} \cdot Z_2 + Q_{2F} &= 0 \end{aligned} \quad (1.7)$$

Jednačba (1.7) može se zapisati u matričnom zapisu:

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} Q_{1F} \\ Q_{2F} \end{Bmatrix}. \quad (1.8)$$

Prvi član na lijevoj strani je matrica krutosti, drugi član je vektor nepoznanica, a član na desnoj strani jednačbe je vektor slobodnih članova [2].

Metoda pomaka biti će objašnjena na jednostavnom primjeru okvirnog nosača.

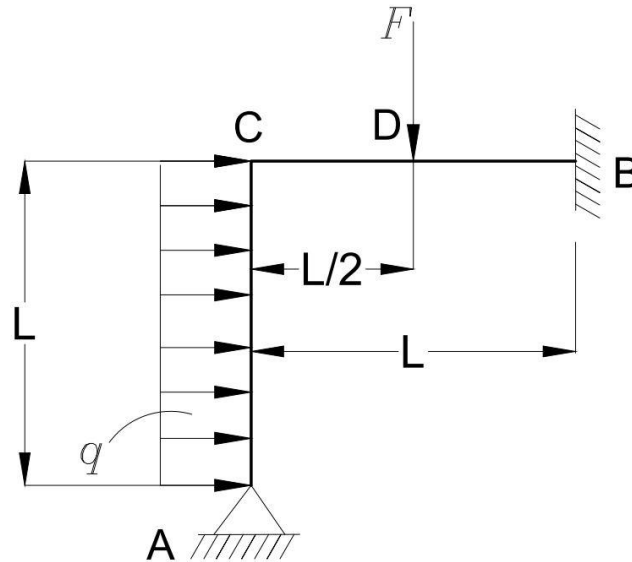
Radi jednostavnije usporedbe metoda zadani primjer biti će identičan primjeru iz metode sila (Slika 1.5).



Zadan je okvirni nosač (Slika 1.14) sa sljedećim ulaznim parametrima:

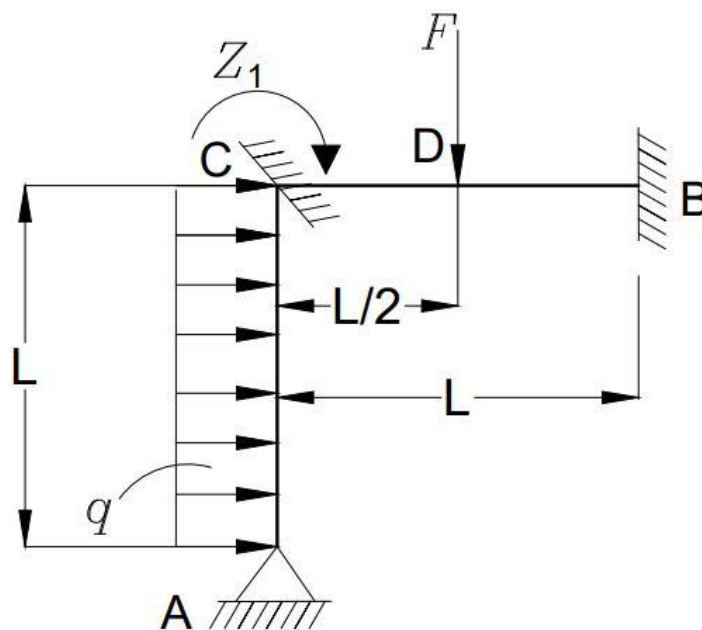
$$L = 2 \text{ m}; q = 5 \text{ kN/m};$$

$$F = 8 \text{ kN}; E, I_y.$$



Slika 1.15 – Jednostavan okvirni nosač (metoda pomaka)

Prema jednadžbi (1.2), zadatak je jedanput kinematički neodređen jer kruti čvor C pri deformiranju nosača dobiva kutni zakret. Kinematički određena konstrukcija dobije se umetanjem u zadanu konstrukciju fiktivnog uklještenja u čvor C kojim se sprječava kutni zakret (Slika 1.15).

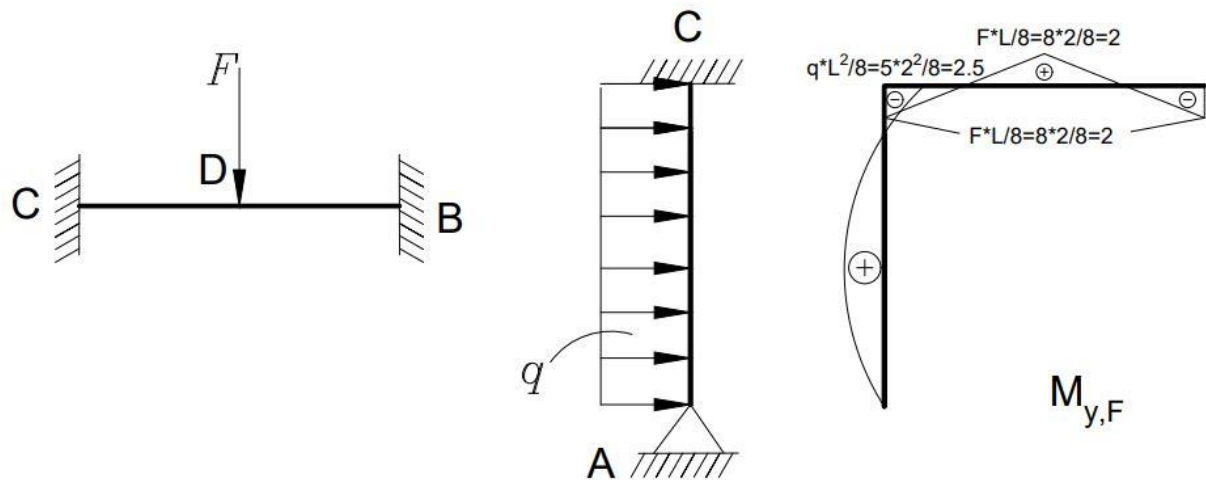


Slika 1.16 – Jednostavan okvirni nosač s uklještenjem u čvoru C

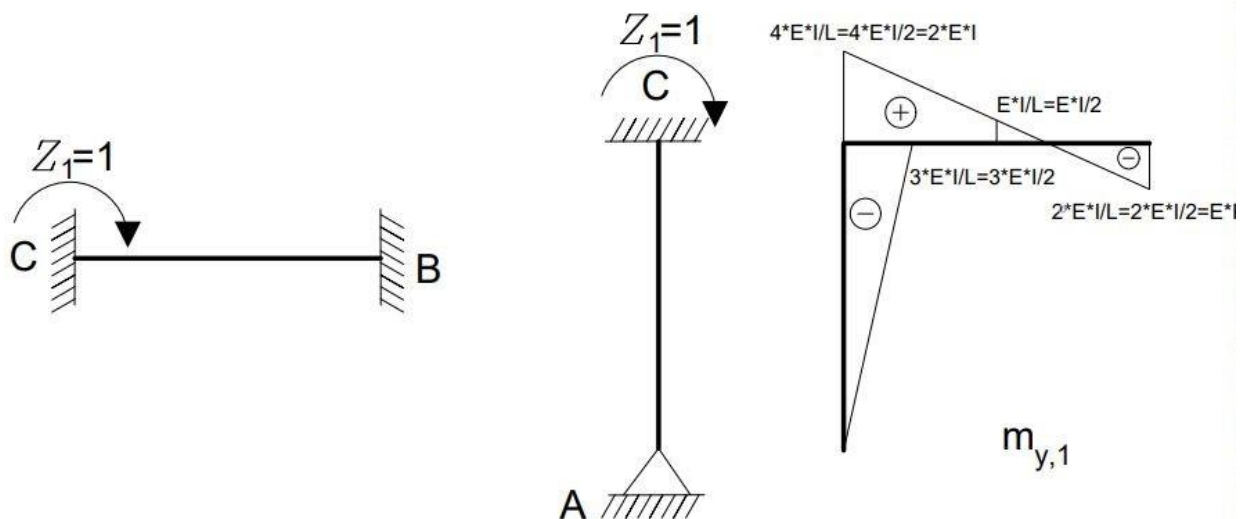
Kanonska jednadžba za jedanput kinematički neodređen zadatak je prema (1.6):

$$k_{11} \cdot Z_1 + Q_{1F} = 0.$$

Sljedeći korak je određivanje dijagrama uslijed zadanih vanjskih opterećenja (Slika 1.16), te dijagram kinematički određenog momenta  $Z_1 = 1$  (Slika 1.17).

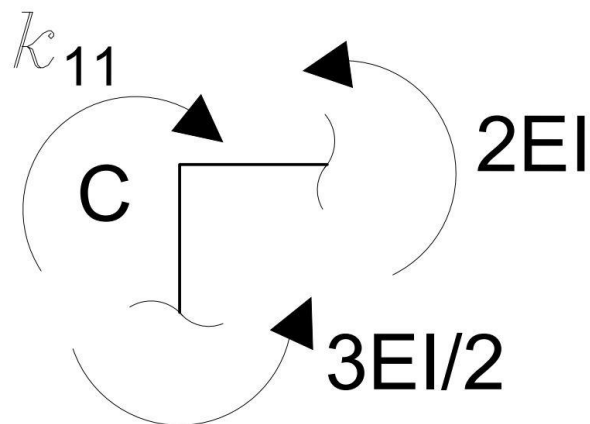


Slika 1.17 – Dijagram momenta savijanja  $M_{y,F}$  okvirnog nosača uslijed vanjskog opterećenja



Slika 1.18 – Dijagram okvirnog nosača uslijed jediničnog opterećenja  $Z_1$

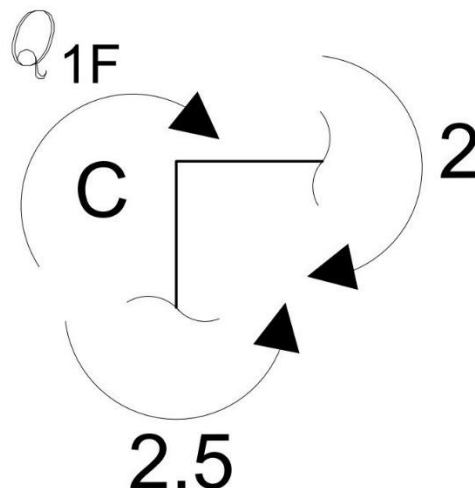
Koeficijent krutosti  $k_{11}$  izračunava se iz uvjeta ravnoteže, gdje se isječe u blizini čvora C konstrukcija i uvrste se momenti iz prethodno definiranih dijagrama.



Slika 1.19 – Koeficijent krutosti  $k_{11}$  u čvoru C

$$\sum M_C = 0:$$

$$-k_{11} + 2 \cdot E \cdot I + \frac{3 \cdot E \cdot I}{2} = 0 \Rightarrow k_{11} = \frac{7}{2} \cdot E \cdot I.$$



Slika 1.20 – Slobodni član  $Q_{1F}$  u čvoru C

$$\sum M_C = 0:$$

$$-Q_{1F} - 2 + 2,5 = 0 \Rightarrow Q_{1F} = 0,5.$$

Iz kanonske jednadžbe (1.6) slijedi:

$$Z_1 = -\frac{Q_{1F}}{k_{11}} = -\frac{\frac{1}{2}}{\frac{7}{2} \cdot E \cdot I} = -\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{E \cdot I}.$$

Za određivanje momenta savijanja u karakterističnim točkama koristi se sljedeća jednadžba:

$$M_{y,T} = m_{y,l} \cdot Z_1 + M_{y,F}.$$

U karakterističnim točkama su dobivene sljedeće vrijednosti momenta savijanja:

$$M_{y,A} = 0 \cdot E \cdot I \cdot \left( -\frac{1}{7 \cdot E \cdot I} \right) + 0 = 0 \text{ kN} \cdot \text{m};$$

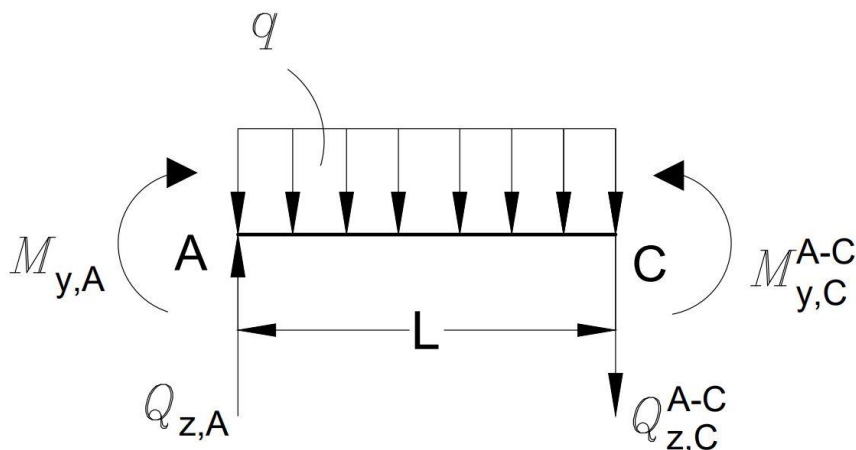
$$M_{y,B} = -E \cdot I \cdot \left( -\frac{1}{7 \cdot E \cdot I} \right) - 2 = -\frac{13}{7} \text{ kN} \cdot \text{m} = -1,86 \text{ kN} \cdot \text{m};$$

$$M_{y,C}^{A-C} = -\frac{3 \cdot E \cdot I}{2} \cdot \left( -\frac{1}{7 \cdot E \cdot I} \right) - \frac{5}{2} = -\frac{16}{7} \text{ kN} \cdot \text{m} = -2,29 \text{ kN} \cdot \text{m};$$

$$M_{y,C}^{C-B} = 2 \cdot E \cdot I \cdot \left( -\frac{1}{7 \cdot E \cdot I} \right) - 2 = -\frac{16}{7} \text{ kN} \cdot \text{m} = -2,29 \text{ kN} \cdot \text{m};$$

$$M_{y,D} = \frac{1}{2} \cdot E \cdot I \cdot \left( -\frac{1}{7 \cdot E \cdot I} \right) + 2 = \frac{27}{14} \text{ kN} \cdot \text{m} = 1,93 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$

Sada kada su poznati momenti savijanja može se pristupiti određivanju poprečnih sila.



Slika 1.21 – Dio okvirnog nosača AC (poprečne sile)

Koristeći uvjete ravnoteže za dio okvirnog nosača AC poprečne sile se određuju na sljedeći način:

$$\sum M_A = 0:$$

$$-M_{y,A} + M_{y,C}^{A-C} - q \cdot L \cdot \frac{L}{2} - Q_{z,C}^{A-C} \cdot L = 0$$

$$0 - \frac{16}{7} - 5 \cdot 2 \cdot \frac{2}{2} - Q_{z,C}^{A-C} \cdot 2 = 0$$

$$2 \cdot Q_{z,C}^{A-C} = -12,29 \Rightarrow Q_{z,C}^{A-C} = -6,14 \text{ kN};$$

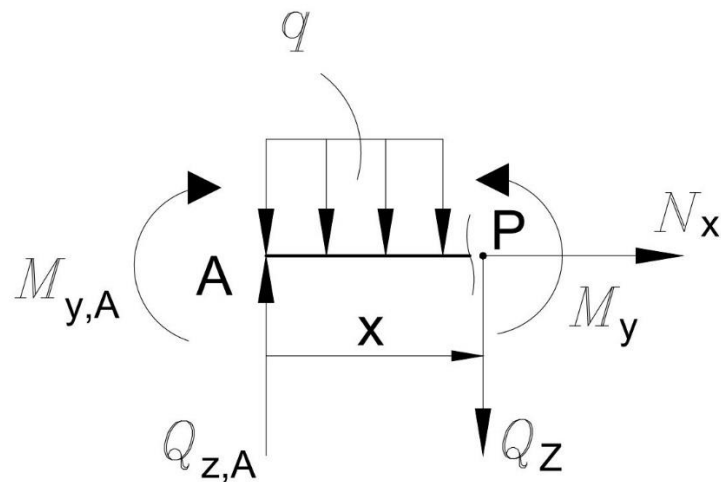
$$\sum F_z = 0:$$

$$Q_{z,C}^{A-C} + q \cdot L - Q_{z,A} = 0$$

$$-6,14 + 5 \cdot 2 - Q_{z,A} = 0$$

$$Q_{z,A} = 3,86 \text{ kN}.$$

Iz izračunatih poprečnih sila vidljivo je da postoji lokalni ekstrem, a on se izračuna presijecanjem na nekom proizvoljno odabranom području (x) u nosaču AC.



Slika 1.22 – Presjek nosača AC za određivanje ekstrema

$$\sum F_z = 0:$$

$$Q_z - Q_{z,A} + q \cdot x = 0$$

$$Q_z - 3,86 + 5 \cdot x = 0$$

$$Q_z = 3,86 - 5 \cdot x$$

Najveći moment u nosaču AC biti će ostvaren kada je poprečna sila jednaka nuli ( $Q_z = 0$ ), pa iz ovoga slijedi da udaljenost ( $x$ ) od početka nosača do ekstrema iznosi:

$$Q_z = 3,86 - 5 \cdot x \Rightarrow 5 \cdot x = 3,86 \Rightarrow x = 0,772 \text{ m.}$$

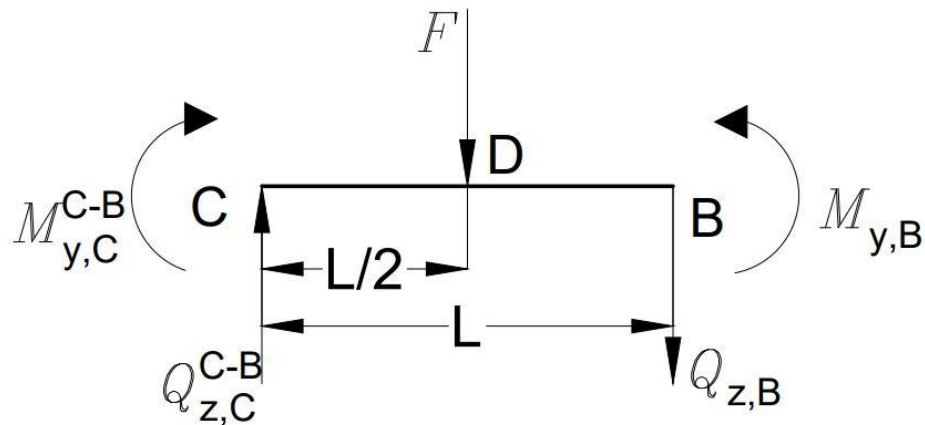
$$\sum M_P = 0:$$

$$M_y - M_{y,A} - Q_{z,A} \cdot x + q \cdot \frac{x^2}{2} = 0$$

$$M_y = -2,5 \cdot x^2 + 3,86 \cdot x$$

$$M_{y(\max)} \text{ za } x=0,772 \text{ m} \Rightarrow -2,5 \cdot 0,772^2 + 3,85 \cdot 0,772$$

$$M_{y(\max)} = 1,48 \text{ kN} \cdot \text{m.}$$



Slika 1.23 – Dio okvirnog nosača CB (poprečne sile)

Koristeći uvjete ravnoteže za dio okvirnog nosača CB poprečne sile se određuju na sljedeći način:

$$\sum M_C = 0:$$

$$M_{y,B} - M_{y,C}^{C-B} - F \cdot \frac{L}{2} - Q_{z,B} \cdot L = 0$$

$$-\frac{13}{7} + \frac{16}{7} - 8 \cdot \frac{2}{2} - 2 \cdot Q_{z,B} = 0$$

$$2 \cdot Q_{z,B} = -7,57 \Rightarrow Q_{z,B} = -3,79 \text{ kN};$$

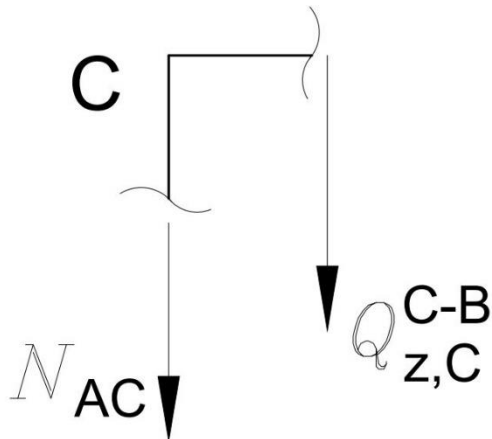
$$\sum F_z = 0:$$

$$-Q_{z,C}^{C-B} + F + Q_{z,B} = 0$$

$$-Q_{z,C}^{C-B} + 8 - 3,79 = 0$$

$$Q_{z,C}^{C-B} = 4,21 \text{ kN}.$$

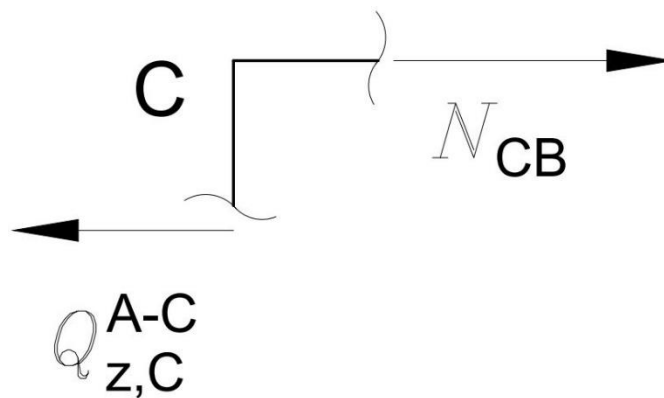
Uzdužne sile se mogu izračunati iz čvora C:



Slika 1.24 – Dio okvirnog nosača AC (uzdužne sile)

$$\sum F_z = 0:$$

$$N_{AC} + Q_{z,C}^{C-B} = 0 \Rightarrow N_{AC} = -Q_{z,C}^{C-B} = -4,21 \text{ kN};$$



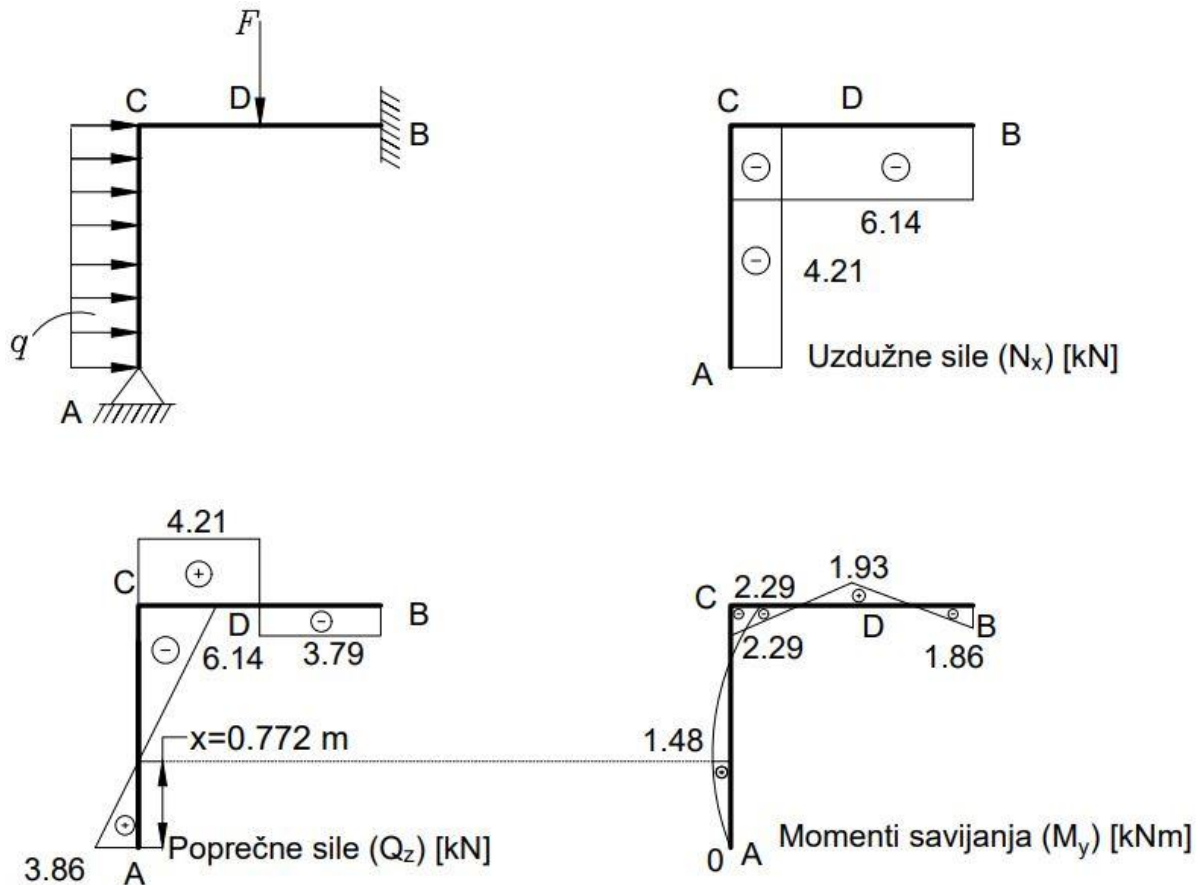
Slika 1.25 – Dio okvirnog nosača CB (uzdužne sile)

$$\sum F_x = 0:$$

$$N_{CB} - Q_{z,C}^{A-C} = 0 \Rightarrow N_{CB} = Q_{z,C}^{A-C} = -6,14 \text{ kN};$$

Posljednji korak u zadatku je nacrtati dijagrame unutarnjih opterećenja (uzdužne sile, poprečne sile i momenti savijanja).





Slika 1.26 – Dijagrami unutarnjih opterećenja okvirnog nosača metodom pomaka

Nakon riješenog identičnog primjera zadatka metodom sila i metodom pomaka dobiveni su praktički isti dijagrami (razlika u određenim podacima je zbog zaokruživanja broja na dvije decimale).

### 1.3. Usporedba metode sila i metode pomaka

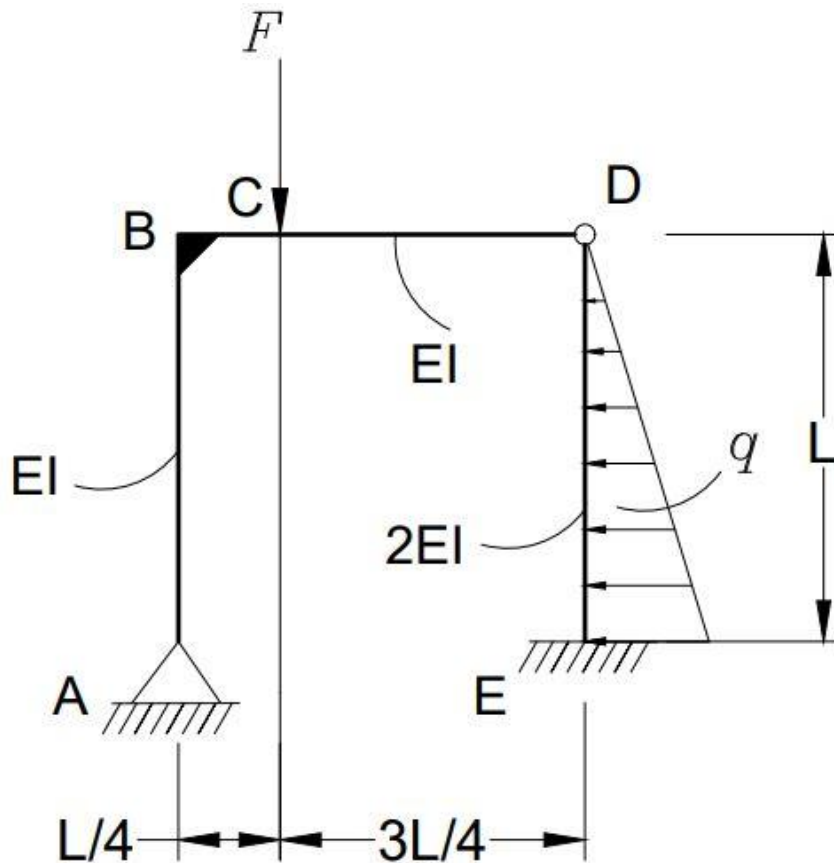
Usporedba metode sila i metode pomaka prikazana je u tablici 1.1.

Tablica 1.1 – Prikaz koncepta proračuna za metodu sila i metodu pomaka [4]

Koncept proračuna	Metoda sila	Metoda pomaka
nepoznanice	sila zbog pomaka	pomak zbog sile
tip neodređenosti	statički	kinematički
način rješavanja	uklanjanje prekobrojnih veza	uvođenje prekobrojnih veza
vrsta matrice	matrica podatnosti	matrica krutosti
jednadžbe	ukupni poopćeni pomak u smjeru uklonjene dodatne veze uzrokovan djelovanjem svih nepoznatih poopćenih sila i vanjskog opterećenja jednak je nuli	ukupna poopćena sila u smjeru uvedene dodatne veze uzrokovane djelovanjem svih nepoznatih poopćenih pomaka i vanjskog opterećenja jednaka je nuli
kanonske jednadžbe (dva puta neodređen zadatak)	$f_{11} \cdot X_1 + f_{12} \cdot X_2 + q_{1F} = 0$ $f_{21} \cdot X_1 + f_{22} \cdot X_2 + q_{2F} = 0$	$k_{11} \cdot Z_1 + k_{12} \cdot \delta_1 + Q_{1F} = 0$ $k_{21} \cdot Z_1 + k_{22} \cdot \delta_1 + Q_{2F} = 0$

## 2. Proračun jedanput statički neodređenog okvirnog nosača metodom sila

Zadan je statički neodređen okvirni nosač sa nepomičnim osloncem na mjestu A i uklještenjem na mjestu E, sa krutom vezom (zavarom) na mjestu B i zglobom na mjestu D (Slika 2.1).



Slika 2.1 – Statički neodređen okvirni nosač (metoda sila)

Ulazni podaci:

$$L = 4 \text{ m}; q = 5 \frac{\text{kN}}{\text{m}};$$

$$F = 2 \cdot q \cdot L = 2 \cdot 5 \cdot 4 = 40 \text{ kN};$$

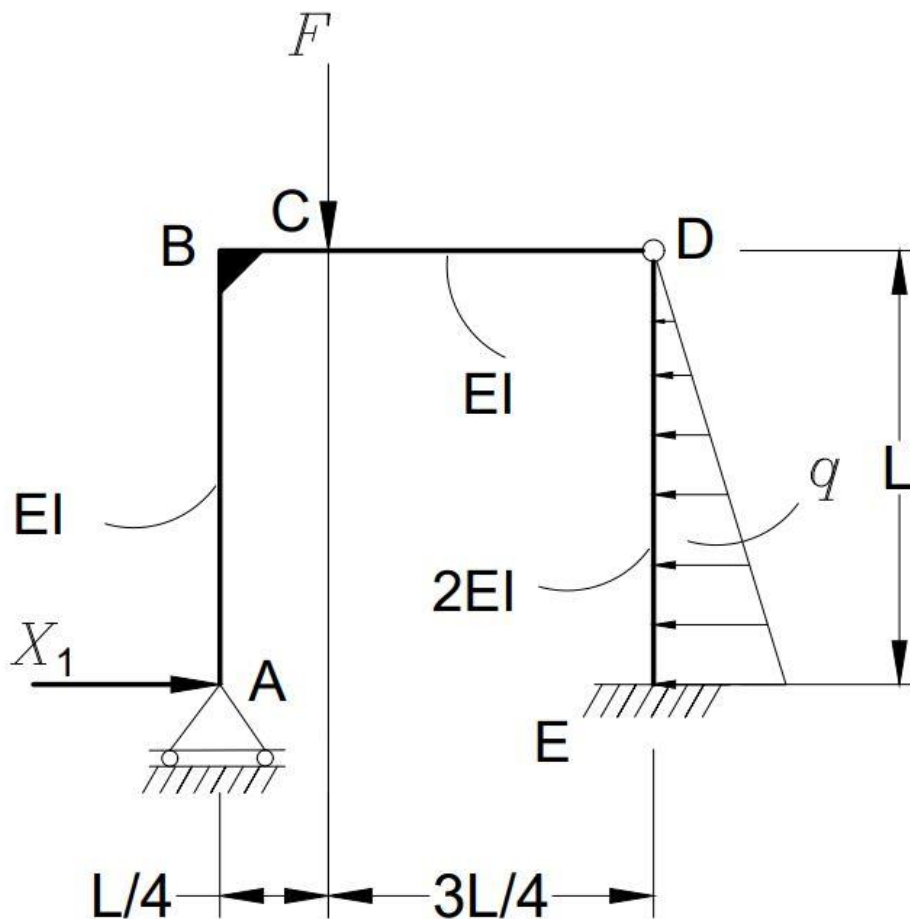
$$E = 210 \text{ GPa}.$$

Prvi korak u zadatku je određivanje koliko je zadatak statički puta neodređen za primjenu metode sila. Na mjestu gdje se nalazi oslonac A postoje dvije nepoznate sile, kao i na mjestu zgloba D (horizontalna i vertikalna sila), a na mjestu uklještenja E uz dvije nepoznate sile postoji i nepoznati moment, što znači da sve skupa postoji sedam nepoznanica.

Zbog zgloba na mjestu D za svaki oslonac se mogu postaviti tri uvjeta ravnoteže, što znači ukupno šest jednadžbi, pa je ovaj zadatak jedanput statički neodređen (1.1):

$$s = n - k = 7 - 6 = 1.$$

Sljedeći korak je uklanjanje suvišnih veza u osloncu na mjestu A i postavljanje jedinične reakcije  $X_1$  (Slika 2.2).

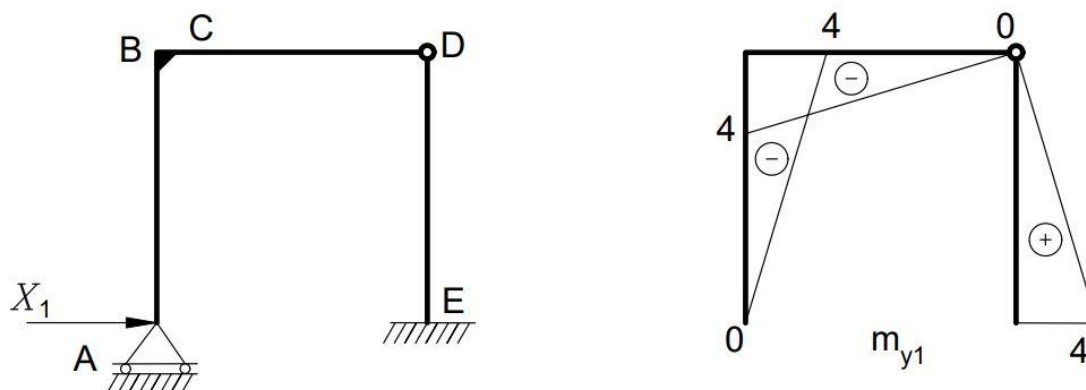
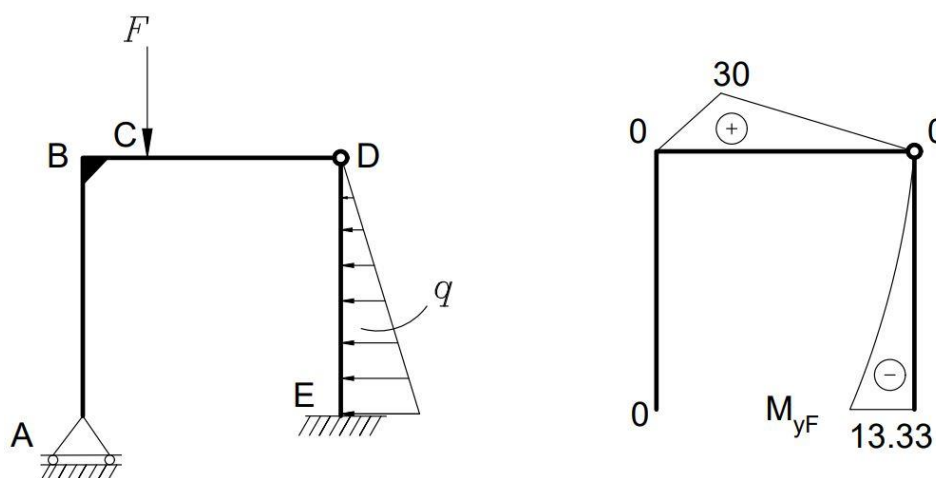


Slika 2.2 – Okvirni nosač s jediničnom reakcijom  $X_1$

Kanonska jednadžba za jedanput statički neodređen zadatak je prema (1.3):

$$f_{11} \cdot X_1 + q_{1F} = 0.$$

Sljedeći korak je crtanje dijagrama za  $X_1 = 1$  (Slika 2.3), te dijagram uslijed zadanih vanjskih opterećenja (Slika 2.4) na temelju dobivenih vrijednosti.

Slika 2.3 –Dijagram momenta savijanja okvirnog nosača uslijed jedinične reakcije  $X_1$ 

Slika 2.4 –Dijagram momenta savijanja okvirnog nosača uslijed vanjskih reakcija

Koeficijenti podatnosti i slobodni članovi se određuju koristeći Mohrov integral, te Vereščaginovo pravilo:

$$f_{11} = \frac{1}{E \cdot I_y} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot (-L) \cdot L \cdot \frac{2}{3} \cdot (-L) + \frac{1}{2} \cdot (-L) \cdot L \cdot \frac{2}{3} \cdot (-L) \right) + \frac{1}{2 \cdot E \cdot I_y} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot (-L) \cdot L \cdot \frac{2}{3} \cdot (-L) \right)$$

$$f_{11} = \frac{1}{E \cdot I_y} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot (-4) \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot (-4) + \frac{1}{2} \cdot (-4) \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot (-4) \right) + \frac{1}{2 \cdot E \cdot I_y} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot (-4) \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot (-4) \right)$$

$$f_{11} = \frac{128}{3} \cdot \frac{1}{E \cdot I_y} + \frac{32}{3} \cdot \frac{1}{E \cdot I_y} = \frac{160}{3} \cdot \frac{1}{E \cdot I_y};$$

$$q_{1F} = \frac{1}{E \cdot I_y} \cdot \left( \frac{L}{6} \cdot (2 \cdot 30 \cdot (-3) + 30 \cdot (-L)) + \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{3 \cdot L}{4} \cdot 30 \cdot \frac{2}{3} \cdot (-3) \right) \right) + \frac{1}{2 \cdot E \cdot I_y} \cdot \left( \frac{1}{4} \cdot L \cdot \left( -\frac{40}{3} \right) \cdot \frac{4}{5} \cdot L \right)$$

$$q_{1F} = \frac{1}{E \cdot I_y} \cdot \left( \frac{4}{6} \cdot (2 \cdot 30 \cdot (-3) + 30 \cdot (-4)) + \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{3 \cdot 4}{4} \cdot 30 \cdot \frac{2}{3} \cdot (-3) \right) \right) + \frac{1}{2 \cdot E \cdot I_y} \cdot \left( \frac{1}{4} \cdot 4 \cdot \left( -\frac{40}{3} \right) \cdot \frac{4}{5} \cdot 4 \right)$$

$$q_{1F} = -140 \cdot \frac{1}{E \cdot I_y} - \frac{64}{3} \cdot \frac{1}{E \cdot I_y} = -\frac{484}{3} \cdot \frac{1}{E \cdot I_y}.$$

Uvrštavanjem u kanonsku jednadžbu se dobije:

$$\frac{160}{3} \cdot \frac{1}{E \cdot I_y} \cdot X_1 - \frac{484}{3} \cdot \frac{1}{E \cdot I_y} = 0$$

$$X_1 = \frac{\frac{484}{3} \cdot \frac{1}{E \cdot I_y}}{\frac{160}{3} \cdot \frac{1}{E \cdot I_y}} = \frac{121}{40} = 3,025.$$

Za određivanje momenta savijanja u karakterističnim točkama koristi se sljedeća jednadžba:

$$M_{y,T} = m_{y,1} \cdot X_1 + M_{y,F}.$$

U karakterističnim točkama su dobivene sljedeće vrijednosti momenta savijanja:

$$M_{y,A} = 0 \cdot 3,025 + 0 = 0 \text{ kN} \cdot \text{m};$$

$$M_{y,B}^{A-B} = -4 \cdot 3,025 + 0 = -12,1 \text{ kN} \cdot \text{m};$$

$$M_{y,B}^{B-D} = -4 \cdot 3,025 + 0 = -12,1 \text{ kN} \cdot \text{m};$$

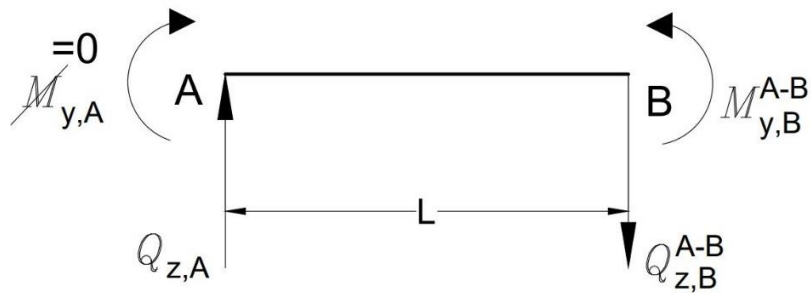
$$M_{y,C} = -3 \cdot 3,025 + 30 = 20,925 \text{ kN} \cdot \text{m};$$

$$M_{y,D}^{B-D} = 0 \cdot 3,025 + 0 = 0 \text{ kN} \cdot \text{m};$$

$$M_{y,D}^{D-E} = 0 \cdot 3,025 + 0 = 0 \text{ kN} \cdot \text{m};$$

$$M_{y,E} = 4 \cdot 3,025 - 13,33 = -1,23 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$

Sada kada su poznati momenti savijanja može se pristupiti određivanju poprečnih sila.



Slika 2.5 – Dio okvirnog nosača AB (poprečne sile)

$$\sum M_B = 0:$$

$$M_{y,B}^{A-B} - Q_{z,A} \cdot L = 0$$

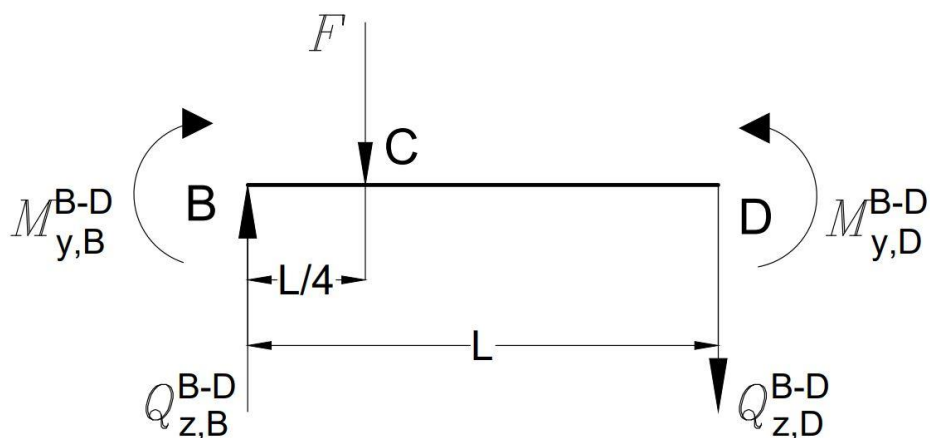
$$4 \cdot Q_{z,A} = -12,1 / : 4$$

$$Q_{z,A} = -3,025 \text{ kN};$$

$$\sum F_z = 0:$$

$$-Q_{z,A} + Q_{z,B}^{A-B} = 0$$

$$Q_{z,B}^{A-B} = Q_{z,A} = -3,025 \text{ kN}.$$



Slika 2.6 – Dio okvirnog nosača BD (poprečne sile)

$$\sum M_B = 0:$$

$$-M_{y,B}^{B-D} - F \cdot \frac{L}{4} - Q_{z,D}^{B-D} \cdot L = 0$$

$$12,1 - 40 \cdot \frac{4}{4} - Q_{z,D}^{B-D} \cdot 4 = 0$$

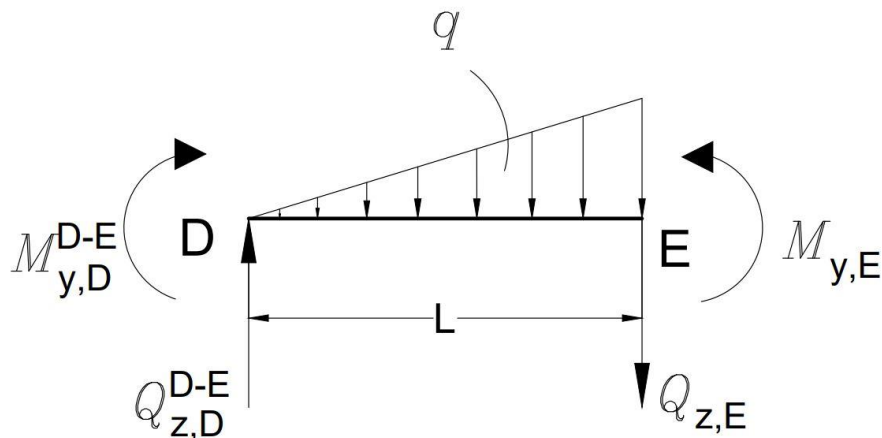
$$4 \cdot Q_{z,D}^{B-D} = -27,9 \Rightarrow Q_{z,D}^{B-D} = -6,975 \text{ kN};$$

$$\sum F_z = 0:$$

$$-Q_{z,B}^{B-D} + Q_{z,D}^{B-D} + F = 0$$

$$Q_{z,B}^{B-D} - 6,975 + 40$$

$$Q_{z,B}^{B-D} = 33,025 \text{ kN}.$$



Slika 2.7 – Dio okvirnog nosača DE (poprečne sile)

Koristeći uvjete ravnoteže za dio okvirnog nosača DE poprečne sile se određuju na sljedeći način:

$$\sum M_D = 0:$$

$$M_{y,E} - q \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{2 \cdot L}{3} - Q_{z,E} \cdot L = 0$$

$$4 \cdot Q_{z,E} = -1,23 - 5 \cdot \frac{4}{2} \cdot \frac{2 \cdot 4}{3}$$

$$4 \cdot Q_{z,E} = -27,9 \Rightarrow Q_{z,E} = -6,975 \text{ kN};$$



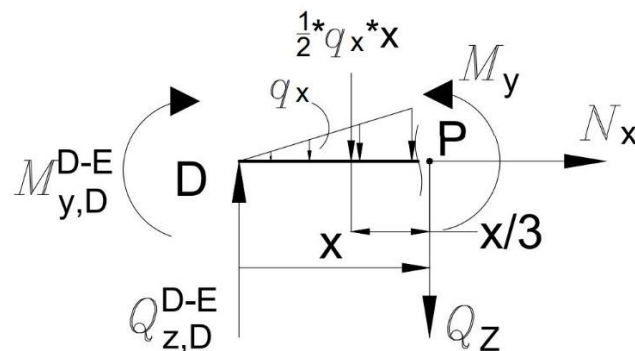
$$\sum F_z = 0:$$

$$-Q_{z,D}^{D-E} + Q_{z,E} + q \cdot \frac{L}{2} = 0$$

$$Q_{z,D}^{D-E} = -6,975 + 10 = 3,025$$

$$Q_{z,D}^{D-E} = 3,025 \text{ kN}.$$

Iz izračunatih poprečnih sila vidljivo je da postoji lokalni ekstrem, a on se izračuna presjecanjem na nekom proizvoljno odabranom području (x) u nosaču DE.



Slika 2.8 – Presjek nosača DE za određivanje ekstrema

$$\sum F_z = 0: \quad q_x = \frac{q \cdot x}{L}$$

$$Q_z - Q_{z,D}^{D-E} + q_x \cdot \frac{x}{2} = 0$$

$$Q_z = 3,025 - \frac{q \cdot x}{L} \cdot \frac{x}{2}$$

$$Q_z = 3,025 - 0,625 \cdot x^2.$$

Najveći moment u nosaču DE biti će ostvaren kada je poprečna sila jednaka nuli ( $Q_z = 0$ ), pa iz ovoga slijedi da udaljenost (x) od početka nosača do ekstrema iznosi:

$$Q_z = -0,625 \cdot x^2 + 3,025 \Rightarrow 0,625 \cdot x^2 = 3,025 \Rightarrow x = 2,2 \text{ m}.$$

$$\sum M_P = 0:$$

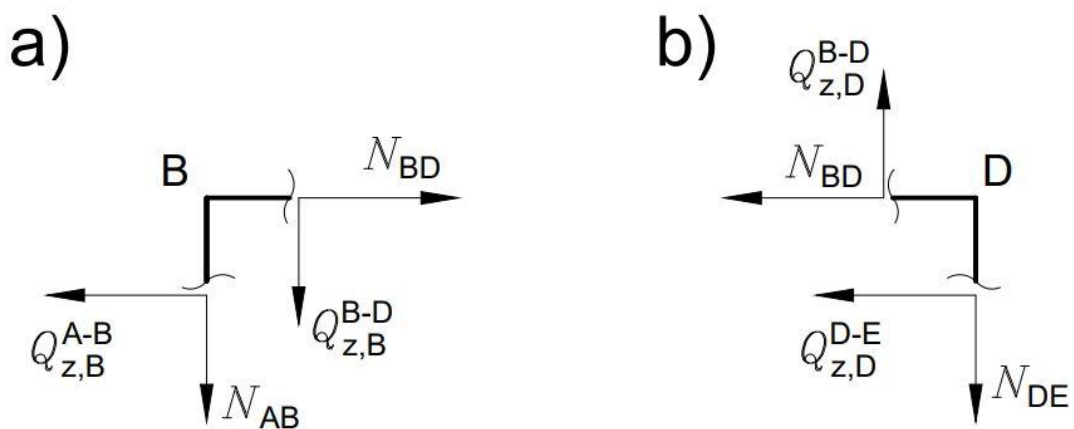
$$M_y - Q_{z,D}^{D-E} \cdot x + q_x \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} = 0$$

$$M_y = -0,2083 \cdot x^3 + 3,025 \cdot x$$

$$M_{y(\max)} \text{ za } x=2,2 \text{ m} \Rightarrow -0,2083 \cdot 2,2^3 + 3,025 \cdot 2,2$$

$$M_{y(\max)} = 4,44 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$

Uzdužne sile se mogu izračunati iz presjeka na mjestima B i D:



Slika 2.9 – Presjek na mjestu B (a) i presjek na mjestu D (b) (uzdužne sile)

Presjek B:

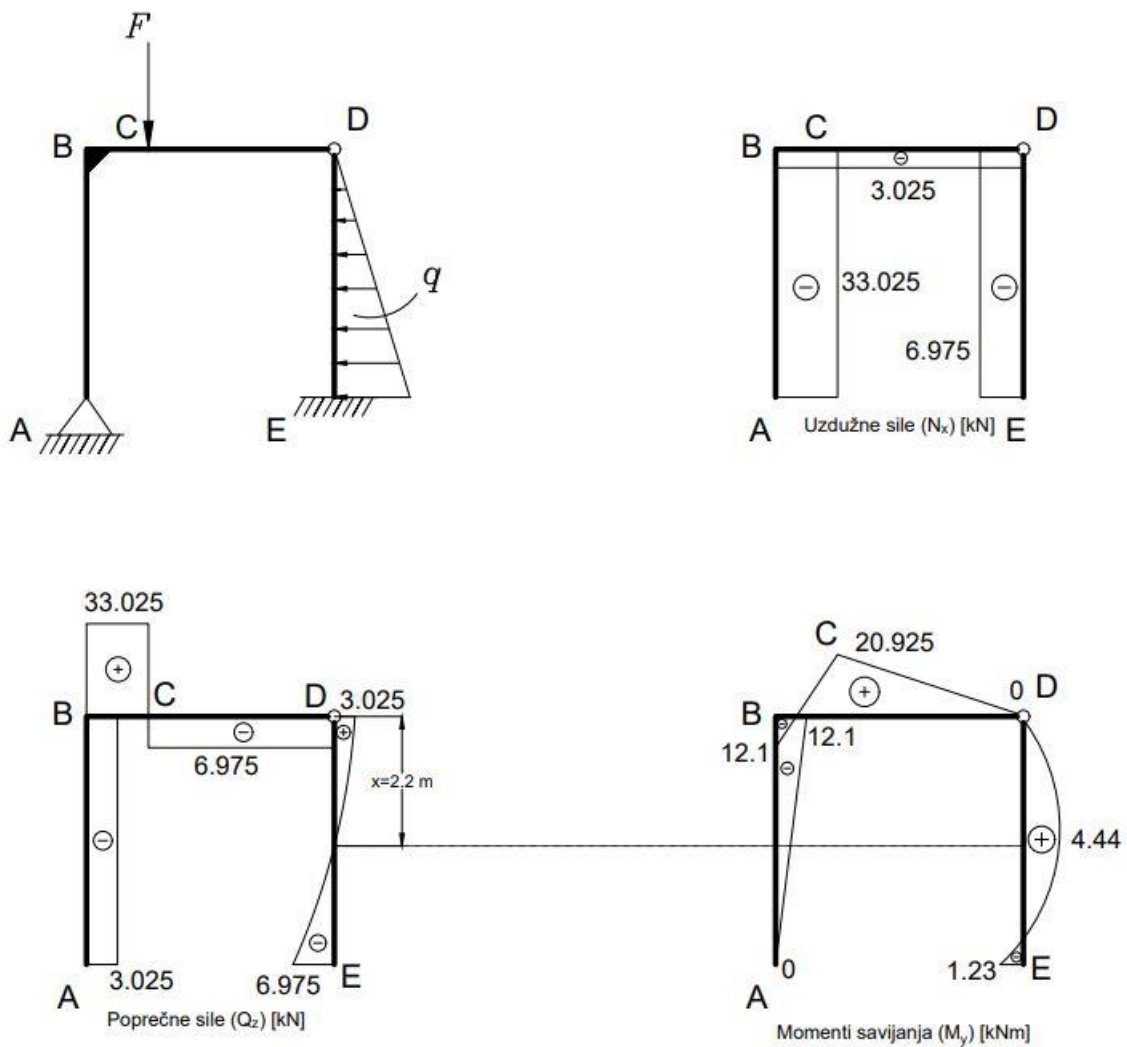
$$\sum F_x = 0: \quad N_{BD} - Q_{z,B}^{A-B} = 0 \Rightarrow N_{BD} = Q_{z,B}^{A-B} = -3,025 \text{ kN};$$

$$\sum F_z = 0: \quad N_{AB} + Q_{z,B}^{B-D} = 0 \Rightarrow N_{AB} = -Q_{z,B}^{B-D} = -33,025 \text{ kN}.$$

Presjek D:

$$\sum F_z = 0: \quad N_{DE} - Q_{z,D}^{B-D} = 0 \Rightarrow N_{DE} = Q_{z,D}^{B-D} = -6,975 \text{ kN}.$$

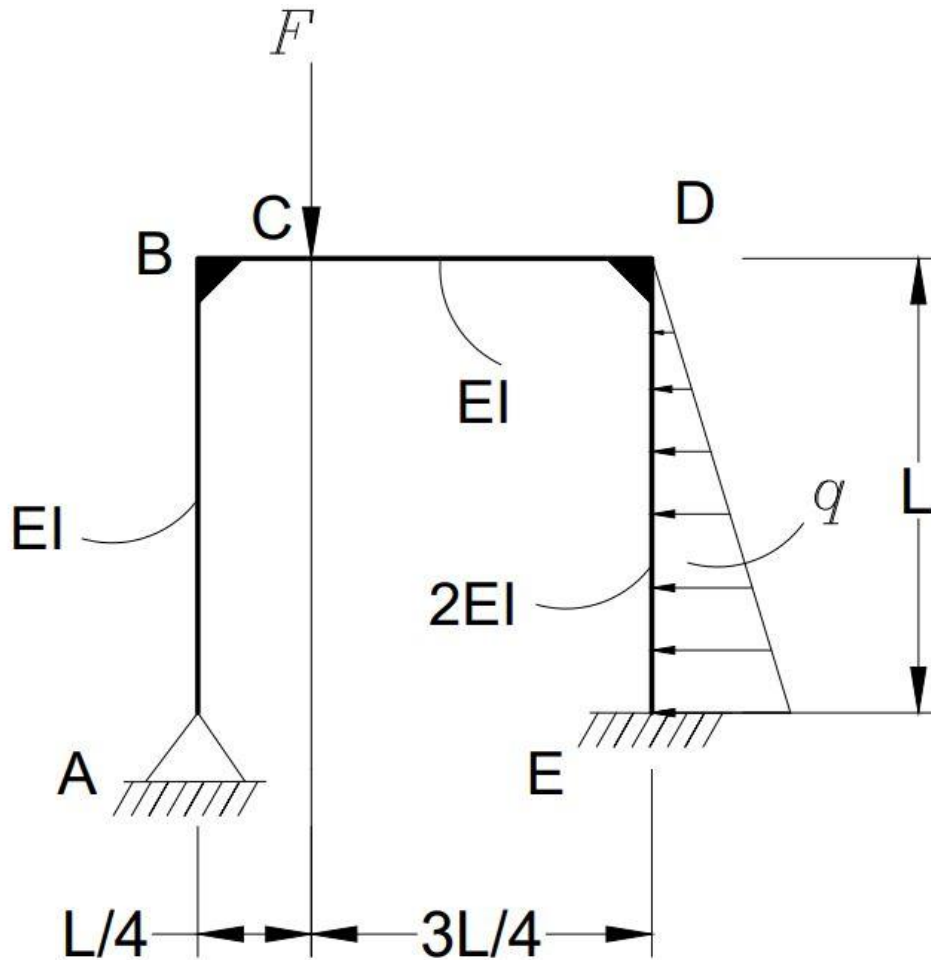
Posljednji korak u zadatku je nacrtati dijagrame unutarnjih opterećenja (uzdužne sile, poprečne sile i momenti savijanja).



Slika 2.10 – Dijagrami unutarnjih opterećenja okvirnog nosača metodom sila

### 3. Proračun dvaput statički neodređenog okvirnog nosača metodom sila

Zadan je dvaput statički neodređen okvirni nosač sa nepomičnim osloncem na mjestu A i uklještenjem na mjestu E, sa krutom vezom (zavarom) na mjestu B i na mjestu D (Slika 3.1).



Slika 3.1 – Dvaput statički neodređen okvirni nosač (metoda sila)

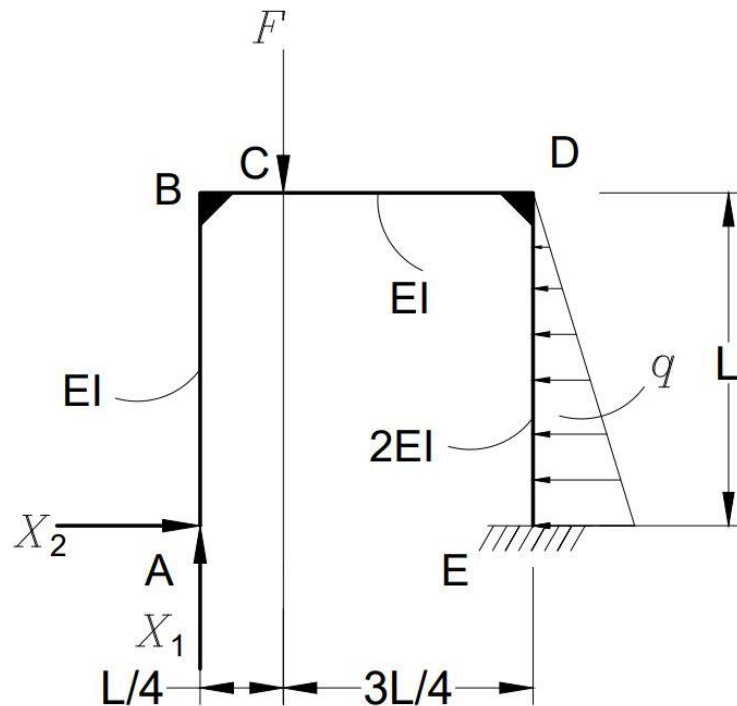
Ulazni podaci:

$$L = 4 \text{ m}; q = 5 \frac{\text{kN}}{\text{m}};$$

$$F = 2 \cdot q \cdot L = 2 \cdot 5 \cdot 4 = 40 \text{ kN};$$

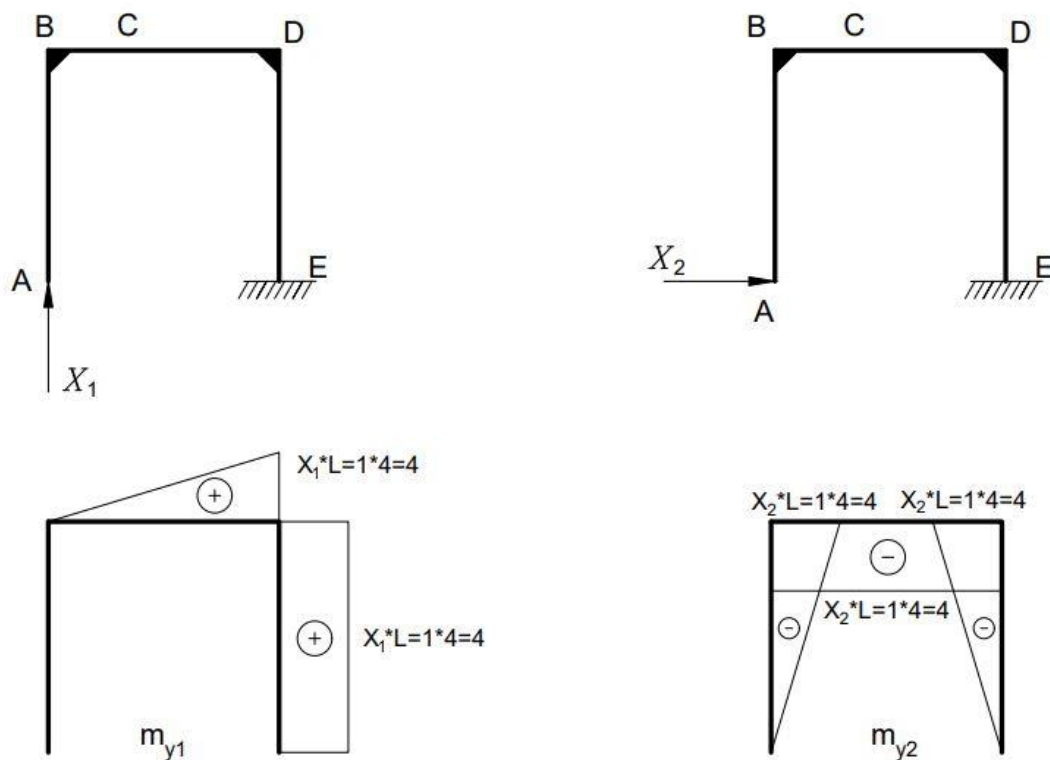
$$E = 210 \text{ GPa}.$$

Uklanjanjem suvišnih veza u osloncu na mjestu A i postavljanjem jediničnih reakcija  $X_1$  i  $X_2$  dobije se ekvivalentna statički određena konstrukcija (Slika 3.2).

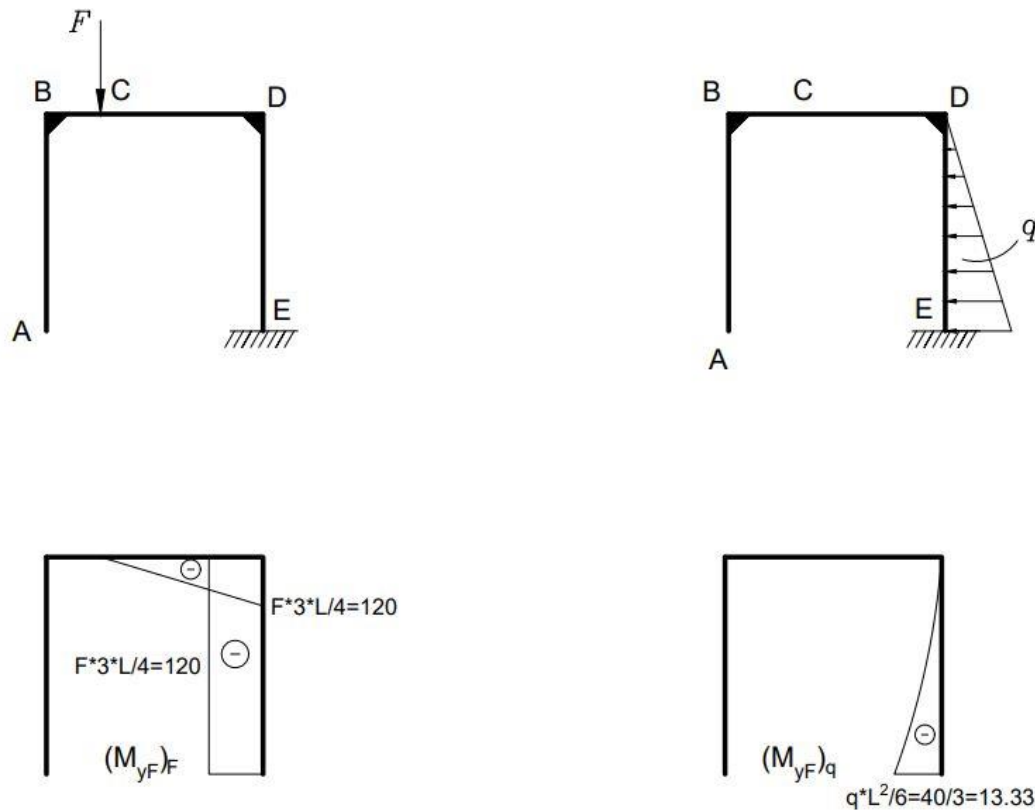


Slika 3.2 – Okvirni nosač s jediničnim reakcijama  $X_1$  i  $X_2$

Sljedeći korak je crtanje dijagrama za  $X_1 = 1$  i za  $X_2 = 1$  (Slika 3.3), te dijagrama uslijed zadanih vanjskih opterećenja (Slika 3.4).



Slika 3.3 – Dijagrami momenta savijanja uslijed djelovanja jediničnih reakcija  $X_1=1$  i  $X_2=1$



Slika 3.4 – Dijagrami momenta savijanja okvirnog nosača uslijed vanjskih reakcija

Koeficijenti podatnosti i slobodni članovi se određuju koristeći Mohrov integral, te Vereščaginovo pravilo:

$$f_{11} = \frac{1}{E \cdot I_y} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot L \cdot L \cdot \frac{2}{3} \cdot L \right) + \frac{1}{2 \cdot E \cdot I_y} \cdot (L \cdot L \cdot L)$$

$$f_{11} = \frac{1}{E \cdot I_y} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 \right) + \frac{1}{2 \cdot E \cdot I_y} \cdot (4 \cdot 4 \cdot 4)$$

$$f_{11} = \frac{64}{3} \cdot \frac{1}{E \cdot I_y} + 32 \cdot \frac{1}{E \cdot I_y} = \frac{160}{3} \cdot \frac{1}{E \cdot I_y};$$

$$f_{12} = \frac{1}{E \cdot I_y} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot L \cdot L \cdot (-L) \right) + \frac{1}{2 \cdot E \cdot I_y} \cdot \left( L \cdot L \cdot \left( -\frac{L}{2} \right) \right)$$

$$f_{12} = \frac{1}{E \cdot I_y} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot (-4) \right) + \frac{1}{2 \cdot E \cdot I_y} \cdot \left( 4 \cdot 4 \cdot \left( -\frac{4}{2} \right) \right)$$

$$f_{12} = -32 \cdot \frac{1}{E \cdot I_y} - 16 \cdot \frac{1}{E \cdot I_y} = -48 \cdot \frac{1}{E \cdot I_y} = f_{21};$$

$$f_{22} = \frac{1}{E \cdot I_y} \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot L \cdot (-L) \cdot \frac{2}{3} \cdot (-L) + (-L) \cdot L \cdot (-L) \right] + \frac{1}{2 \cdot E \cdot I_y} \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot L \cdot (-L) \cdot \frac{2}{3} \cdot (-L) \right]$$

$$f_{22} = \frac{1}{E \cdot I_y} \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot (-4) \cdot \frac{2}{3} \cdot (-4) + (-4) \cdot 4 \cdot (-4) \right] + \frac{1}{2 \cdot E \cdot I_y} \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot (-4) \cdot \frac{2}{3} \cdot (-4) \right];$$

$$f_{22} = \frac{256}{3} \cdot \frac{1}{E \cdot I_y} + \frac{32}{3} \cdot \frac{1}{E \cdot I_y} = 96 \cdot \frac{1}{E \cdot I_y};$$

$$q_{1F} = \frac{1}{E \cdot I_y} \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot \frac{3 \cdot L}{4} \cdot \left( -F \cdot \frac{3 \cdot L}{4} \right) \cdot \frac{3}{4} \cdot L \right] + \frac{1}{2 \cdot E \cdot I_y} \cdot \left[ \left( -F \cdot \frac{3 \cdot L}{4} \right) \cdot L \cdot L + \frac{1}{4} \cdot L \cdot \left( -q \cdot \frac{L^2}{6} \right) \cdot L \right]$$

$$q_{1F} = \frac{1}{E \cdot I_y} \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot \frac{3 \cdot \mathcal{A}}{\mathcal{A}} \cdot \left( -40 \cdot \frac{3 \cdot \mathcal{A}}{\mathcal{A}} \right) \cdot \frac{3}{\mathcal{A}} \cdot \mathcal{A} \right] + \frac{1}{2 \cdot E \cdot I_y} \cdot \left[ \left( -40 \cdot \frac{3 \cdot \mathcal{A}}{\mathcal{A}} \right) \cdot 4 \cdot 4 + \frac{1}{\mathcal{A}} \cdot \mathcal{A} \cdot \left( -5 \cdot \frac{4^2}{6} \right) \cdot 4 \right]$$

$$q_{1F} = -540 \cdot \frac{1}{E \cdot I_y} - \frac{2960}{3} \cdot \frac{1}{E \cdot I_y} = -\frac{4580}{3} \cdot \frac{1}{E \cdot I_y};$$

$$q_{2F} = \frac{1}{E \cdot I_y} \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot \frac{3 \cdot L}{4} \cdot \left( -F \cdot \frac{3 \cdot L}{4} \right) \cdot (-L) \right] + \frac{1}{2 \cdot E \cdot I_y} \cdot \left[ \left( -F \cdot \frac{3 \cdot L}{4} \right) \cdot L \cdot \left( -\frac{L}{2} \right) + \frac{1}{4} \cdot L \cdot \left( -q \cdot \frac{L^2}{6} \right) \cdot \left( -\frac{1}{5} \cdot L \right) \right]$$

$$q_{2F} = \frac{1}{E \cdot I_y} \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot \frac{3 \cdot \mathcal{A}}{\mathcal{A}} \cdot \left( -40 \cdot \frac{3 \cdot \mathcal{A}}{\mathcal{A}} \right) \cdot (-4) \right] + \frac{1}{2 \cdot E \cdot I_y} \cdot \left[ \left( -40 \cdot \frac{3 \cdot \mathcal{A}}{\mathcal{A}} \right) \cdot 4 \cdot \left( -\frac{4}{2} \right) + \frac{1}{\mathcal{A}} \cdot \mathcal{A} \cdot \left( -5 \cdot \frac{4^2}{6} \right) \cdot \left( -\frac{1}{5} \cdot 4 \right) \right]$$

$$q_{2F} = 720 \cdot \frac{1}{E \cdot I_y} + \frac{1456}{3} \cdot \frac{1}{E \cdot I_y} = \frac{3616}{3} \cdot \frac{1}{E \cdot I_y}.$$

Uvrštavanjem u kanonske jednadžbe se dobije:

$$\frac{160}{3} \cdot \frac{1}{E \cdot I_y} \cdot X_1 - 48 \cdot \frac{1}{E \cdot I_y} \cdot X_2 - \frac{4580}{3} \cdot \frac{1}{E \cdot I_y} = 0; / \cdot E \cdot I_y$$

$$-48 \cdot \frac{1}{E \cdot I_y} \cdot X_1 + 96 \cdot \frac{1}{E \cdot I_y} \cdot X_2 + \frac{3616}{3} \cdot \frac{1}{E \cdot I_y} = 0; / \cdot E \cdot I_y$$

$$\frac{160}{3} \cdot X_1 - 48 \cdot X_2 = \frac{4580}{3}; / \cdot 6$$

$$-48 \cdot X_1 + 96 \cdot X_2 = -\frac{3616}{3}; / \cdot 3$$

$$320 \cdot X_1 - 288 \cdot X_2 = 9160;$$

$$-144 \cdot X_1 + 288 \cdot X_2 = -3616;$$

$$176 \cdot X_1 = 5544 / : (176) \Rightarrow X_1 = \frac{63}{2} = 31,5.$$

Uvrštavanjem dobivene vrijednosti  $X_1$  za određivanje nepoznanice  $X_2$  dobije se:

$$320 \cdot \frac{63}{2} - 288 \cdot X_2 = 9160 \Rightarrow X_2 = \frac{115}{36} = 3,194.$$

Za određivanje momenta savijanja u karakterističnim točkama koristi se sljedeća jednadžba:

$$M_{y,T} = m_{y,1} \cdot X_1 + m_{y,2} \cdot X_2 + M_{y,F}.$$

U karakterističnim točkama su dobivene sljedeće vrijednosti momenta savijanja:

$$M_{y,A} = 0 \cdot 31,5 + 0 \cdot 3,194 + 0 = 0 \text{ kN} \cdot \text{m};$$

$$M_{y,B}^{A-B} = 0 \cdot 31,5 + (-4) \cdot 3,194 + 0 = -12,78 \text{ kN} \cdot \text{m};$$

$$M_{y,B}^{B-D} = 0 \cdot 31,5 + (-4) \cdot 3,194 + 0 = -12,78 \text{ kN} \cdot \text{m};$$

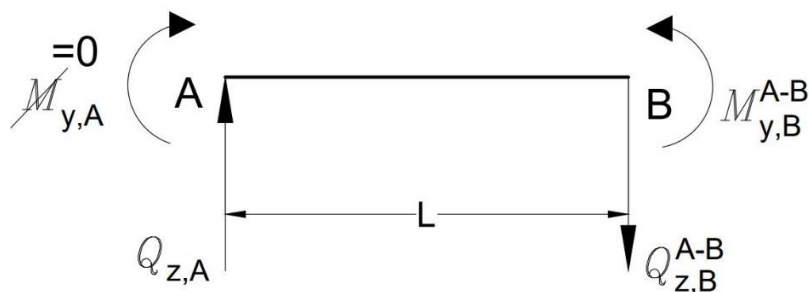
$$M_{y,C} = 1 \cdot 31,5 + (-4) \cdot 3,194 + 0 = 18,72 \text{ kN} \cdot \text{m};$$

$$M_{y,D}^{B-D} = 4 \cdot 31,5 + (-4) \cdot 3,194 - 120 = -6,78 \text{ kN} \cdot \text{m};$$

$$M_{y,D}^{D-E} = 4 \cdot 31,5 + (-4) \cdot 3,194 - 120 = -6,78 \text{ kN} \cdot \text{m};$$

$$M_{y,E} = 4 \cdot 31,5 + 0 \cdot 3,194 - 120 - 13,33 = -7,33 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$

Sada kada su poznati momenti savijanja može se pristupiti određivanju poprečnih sila.



Slika 3.5 – Dio okvirnog nosača AB (poprečne sile)



$$\sum M_B = 0:$$

$$M_{y,B}^{A-B} - Q_{z,A} \cdot L = 0$$

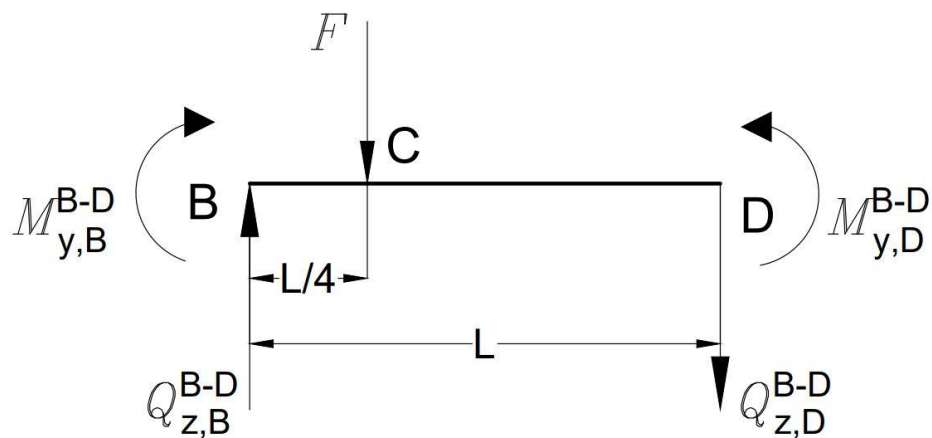
$$4 \cdot Q_{z,A} = -12,78 / : 4$$

$$Q_{z,A} = -3,195 \text{ kN};$$

$$\sum F_z = 0:$$

$$-Q_{z,A} + Q_{z,B}^{A-B} = 0$$

$$Q_{z,B}^{A-B} = Q_{z,A} = -3,195 \text{ kN}.$$



Slika 3.6 – Dio okvirnog nosača BD (poprečne sile)

$$\sum M_B = 0:$$

$$-M_{y,B}^{B-D} - F \cdot \frac{L}{4} - Q_{z,D}^{B-D} \cdot L + M_{y,D}^{B-D} = 0$$

$$12,78 - 40 \cdot \frac{4}{4} - Q_{z,D}^{B-D} \cdot 4 - 6,78 = 0$$

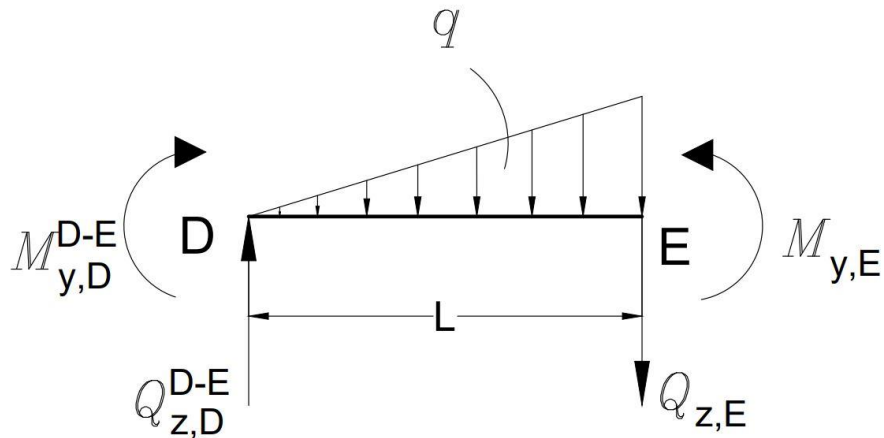
$$4 \cdot Q_{z,D}^{B-D} = -34 \Rightarrow Q_{z,D}^{B-D} = -8,5 \text{ kN};$$

$$\sum F_z = 0:$$

$$-Q_{z,B}^{B-D} + Q_{z,D}^{B-D} + F = 0$$

$$Q_{z,B}^{B-D} - 8,5 + 40$$

$$Q_{z,B}^{B-D} = 31,5 \text{ kN}.$$



Slika 3.7 – Dio okvirnog nosača DE (poprečne sile)

Koristeći uvjete ravnoteže za dio okvirnog nosača DE poprečne sile se određuju na sljedeći način:

$$\sum M_D = 0:$$

$$M_{y,E} - M_{y,D}^{D-E} - q \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{2 \cdot L}{3} - Q_{z,E} \cdot L = 0$$

$$4 \cdot Q_{z,E} = -7,33 + 6,78 - 5 \cdot \frac{4}{2} \cdot \frac{2 \cdot 4}{3}$$

$$4 \cdot Q_{z,E} = -27,22 \Rightarrow Q_{z,E} = -6,8 \text{ kN};$$

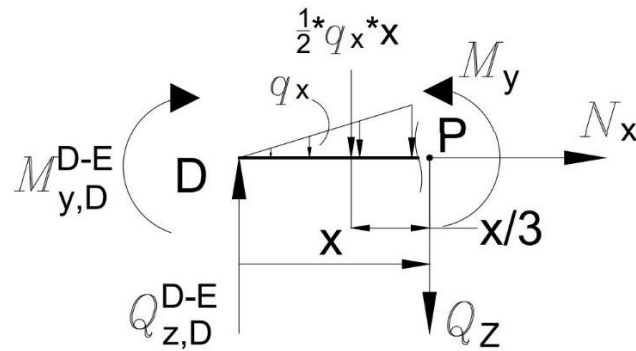
$$\sum F_z = 0:$$

$$-Q_{z,D}^{D-E} + Q_{z,E} + q \cdot \frac{L}{2} = 0$$

$$Q_{z,D}^{D-E} = -6,8 + 10 = 3,2$$

$$Q_{z,D}^{D-E} = 3,2 \text{ kN}.$$

Iz izračunatih poprečnih sila vidljivo je da postoji lokalni ekstrem, a on se izračuna presijecanjem na nekom proizvoljno odabranom području (x) u nosaču DE.



Slika 3.8 – Presjek nosača DE za određivanje ekstrema

$$\sum F_z = 0: \quad q_x = \frac{q \cdot x}{L}$$

$$Q_z - Q_{z,D}^{D-E} + q_x \cdot \frac{x}{2} = 0$$

$$Q_z = 3,2 - \frac{q \cdot x}{L} \cdot \frac{x}{2}$$

$$Q_z = 3,2 - 0,625 \cdot x^2.$$

Najveći moment u nosaču DE biti će ostvaren kada je poprečna sila jednaka nuli ( $Q_z = 0$ ), pa iz ovoga slijedi da udaljenost ( $x$ ) od početka nosača do ekstrema iznosi:

$$Q_z = -0,625 \cdot x^2 + 3,2 \Rightarrow 0,625 \cdot x^2 = 3,2 \Rightarrow x = 2,26 \text{ m.}$$

$$\sum M_P = 0:$$

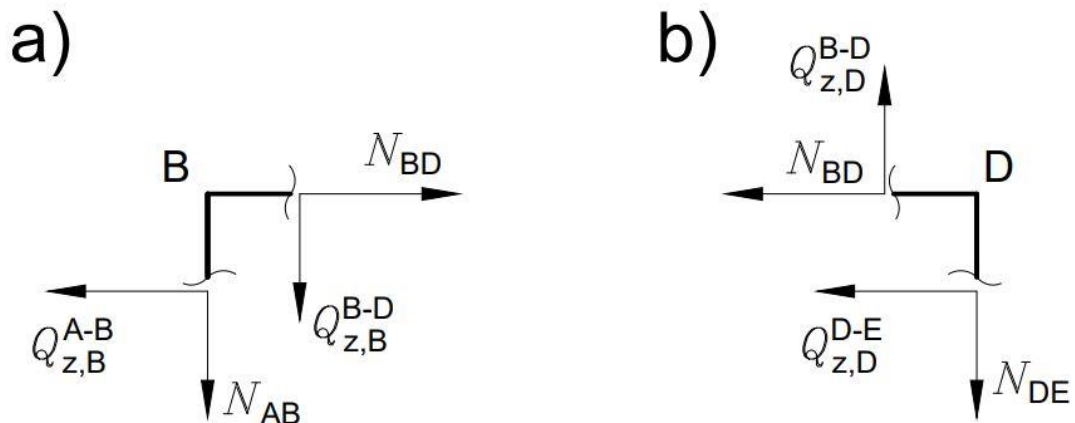
$$M_y - Q_{z,D}^{D-E} \cdot x + q_x \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} - M_{y,D}^{D-E} = 0$$

$$M_y = -0,2083 \cdot x^3 + 3,2 \cdot x - 6,78$$

$$M_{y(\max)} \text{ za } x=2,26 \text{ m} \Rightarrow -0,2083 \cdot 2,26^3 + 3,2 \cdot 2,26 - 6,78$$

$$M_{y(\max)} = -1,95 \text{ kN} \cdot \text{m.}$$

Uzdužne sile se mogu izračunati iz presjeka na mjestima B i D:



Slika 3.9 – Presjek na mjestu B (a) i presjek na mjestu D (b) (uzdužne sile)

Presjek B:

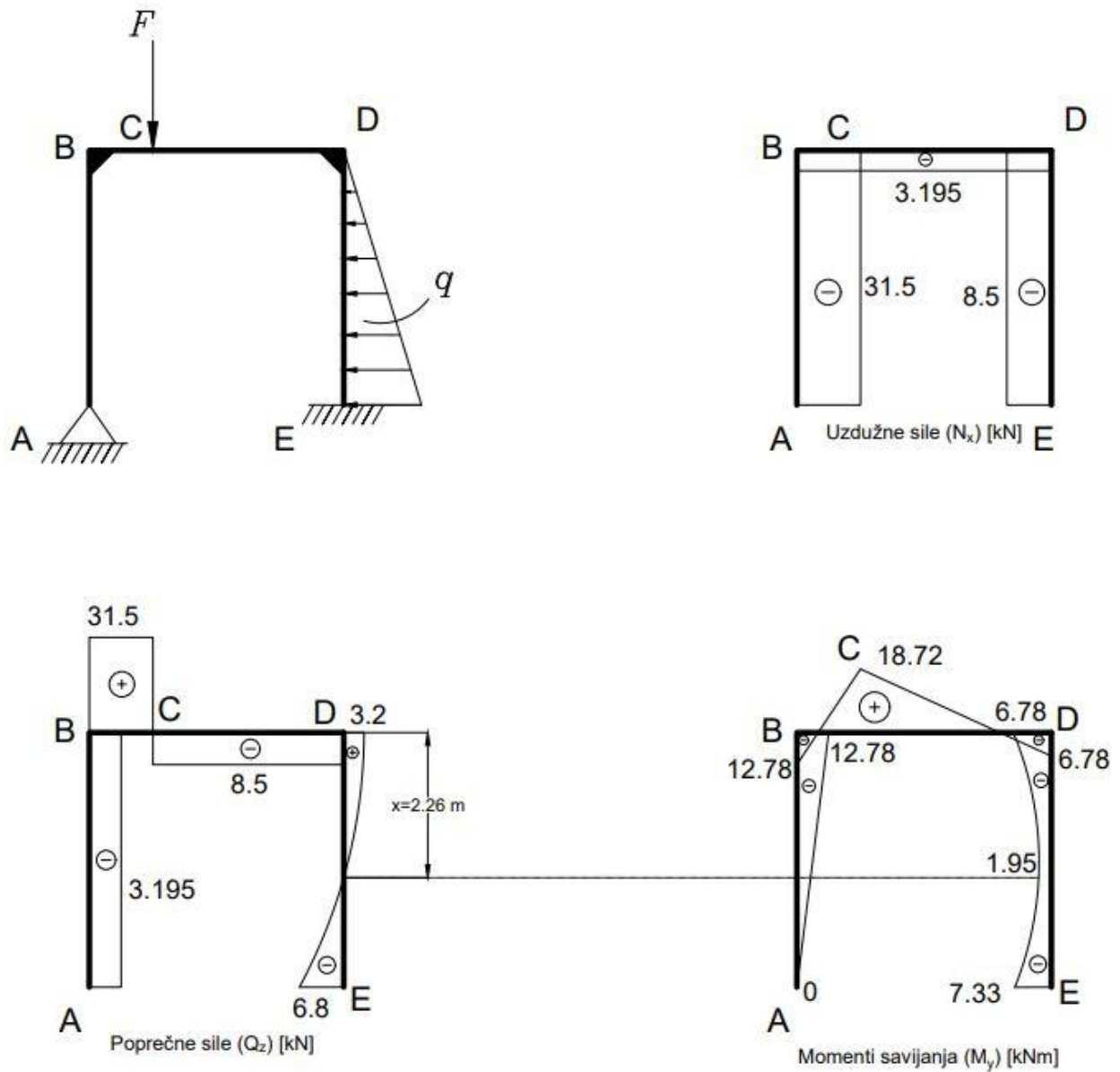
$$\sum F_x=0: \quad N_{BD} - Q_{z,B}^{A-B} = 0 \Rightarrow N_{BD} = Q_{z,B}^{A-B} = -3,195 \text{ kN};$$

$$\sum F_z=0: \quad N_{AB} + Q_{z,B}^{B-D} = 0 \Rightarrow N_{AB} = -Q_{z,B}^{B-D} = -31,5 \text{ kN}.$$

Presjek D:

$$\sum F_z=0: \quad N_{DE} - Q_{z,D}^{B-D} = 0 \Rightarrow N_{DE} = Q_{z,D}^{B-D} = -8,5 \text{ kN}.$$

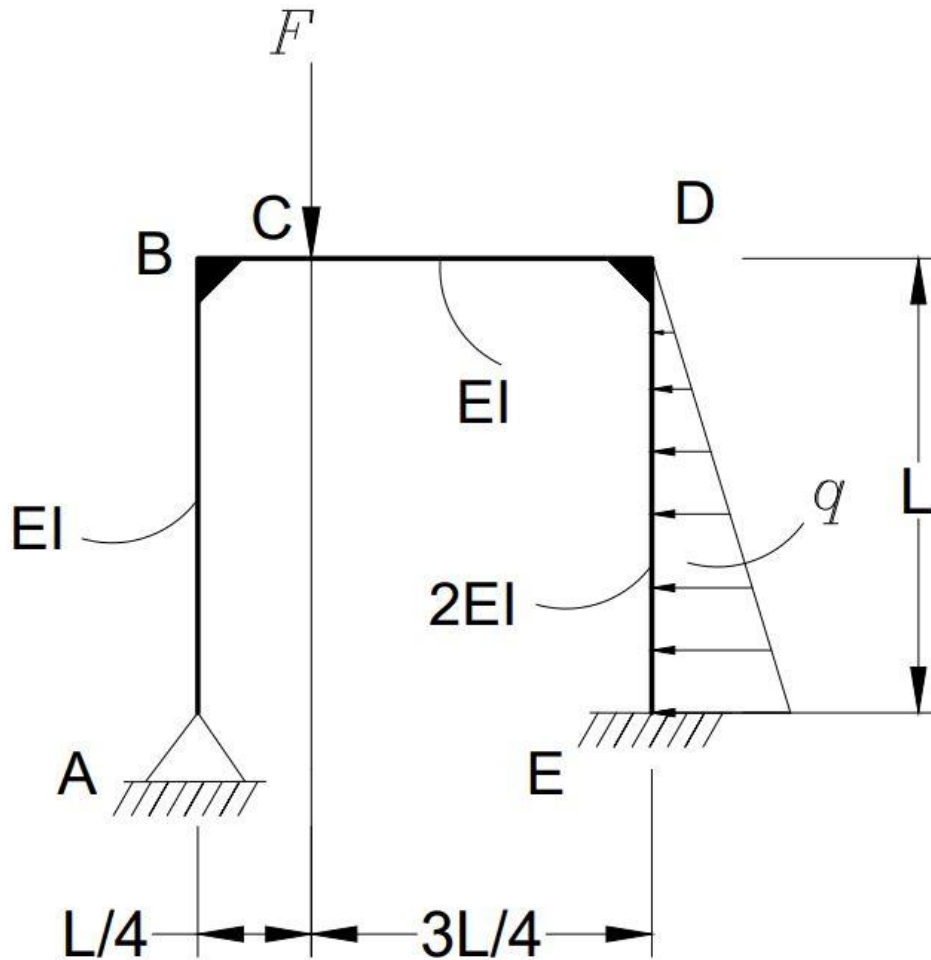
Posljednji korak u zadatku je nacrtati dijagrame unutarnjih opterećenja (uzdužne sile, poprečne sile i momenti savijanja).



Slika 3.10 – Dijagrami unutarnjih opterećenja okvirnog nosača metodom sila

#### 4. Proračun tripud kinematički neodređenog okvirnog nosača metodom pomaka

Zadan je zadatak identičan onome iz prethodnog poglavlja, ali ovaj put će biti riješen metodom pomaka.



Slika 4.1 – Kinematički neodređen okvirni nosač (metoda pomaka)

Ulazni podaci:

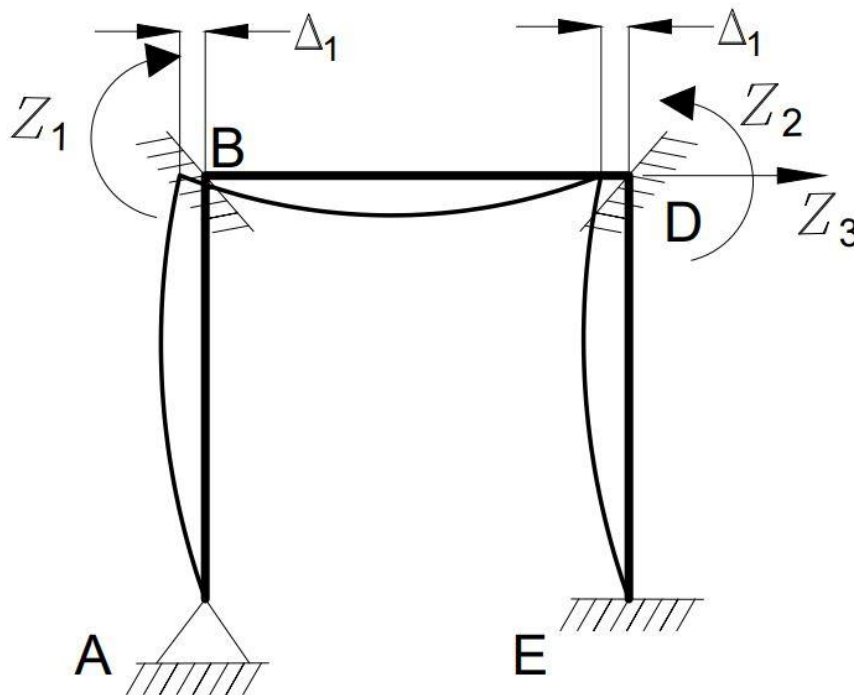
$$L = 4 \text{ m}; q = 5 \frac{\text{kN}}{\text{m}};$$

$$F = 2 \cdot q \cdot L = 2 \cdot 5 \cdot 4 = 40 \text{ kN};$$

$$E = 210 \text{ GPa}.$$

Prvi korak u zadatku je određivanje koliko je zadatak kinematički puta neodređen za primjenu metode pomaka. Na mjestima B i D postoje kutni zakreti te linearni pomak čvora D (čvor B ima isti linearni pomak kao i čvor D), pa iz toga slijedi prema jednadžbi (1.2) da je ovaj zadatak tri puta kinematički neodređen:

$$N = N_{\Delta} + N_{\varphi} = 1 + 2 = 3.$$

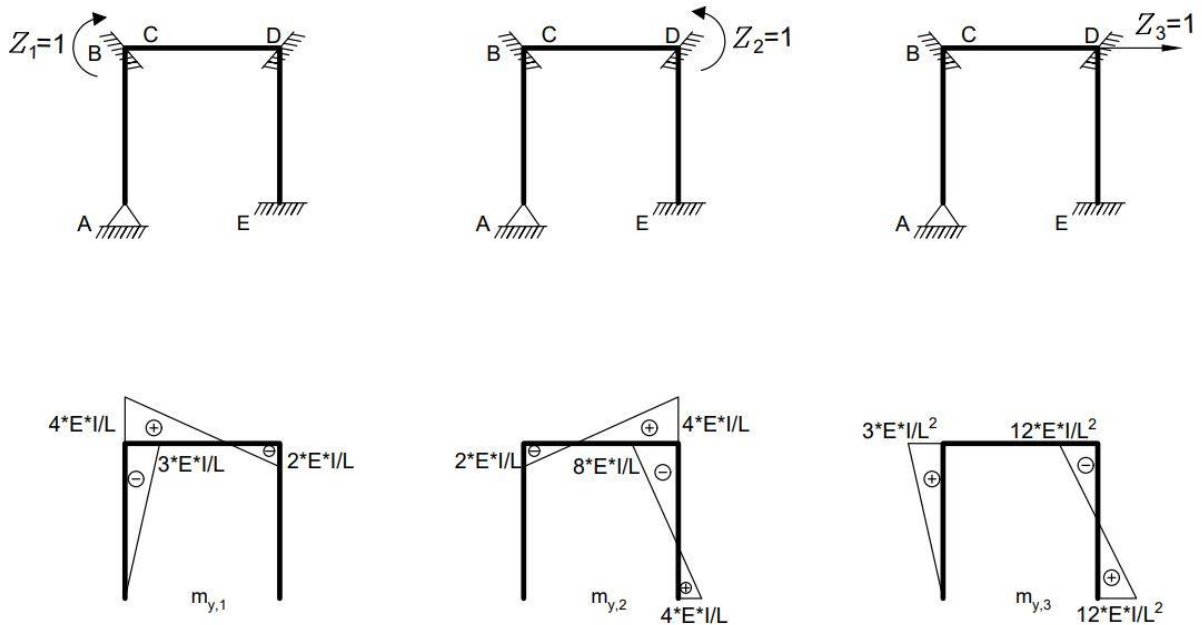


Slika 4.2 – Okvirni nosač s uklještenjima u B i D te linearni pomak mjesta D

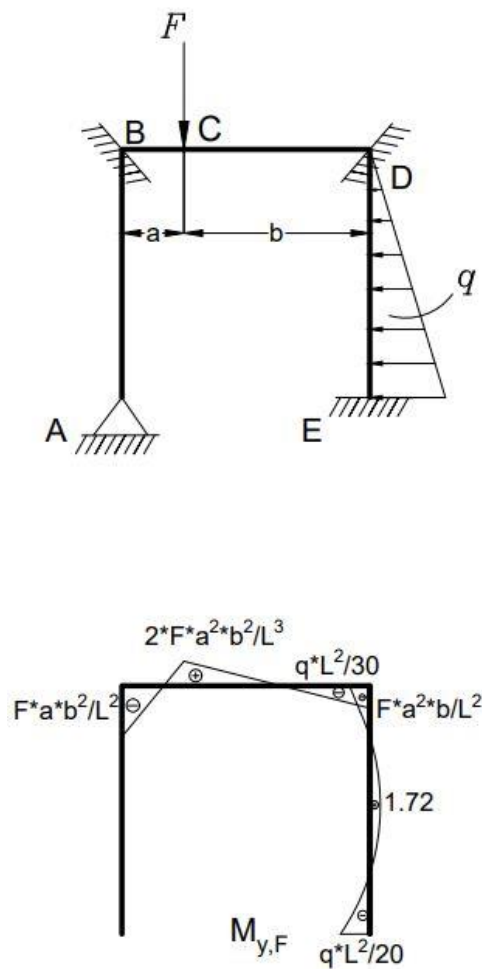
Kanonska jednadžba za triput kinematički neodređen zadatak je:

$$\begin{aligned} k_{11} \cdot Z_1 + k_{12} \cdot Z_2 + k_{13} \cdot Z_3 + Q_{1F} &= 0 \\ k_{21} \cdot Z_1 + k_{22} \cdot Z_2 + k_{23} \cdot Z_3 + Q_{2F} &= 0 \\ k_{31} \cdot Z_1 + k_{32} \cdot Z_2 + k_{33} \cdot Z_3 + Q_{3F} &= 0 \end{aligned}$$

Sljedeći korak je određivanje dijagrama uslijed kinematički određenog momenta  $Z_1 = 1$  i  $Z_2 = 1$  i translacijskog pomaka  $Z_3 = 1$  (Slika 4.3), te dijagram uslijed zadanih vanjskih opterećenja (Slika 4.4).



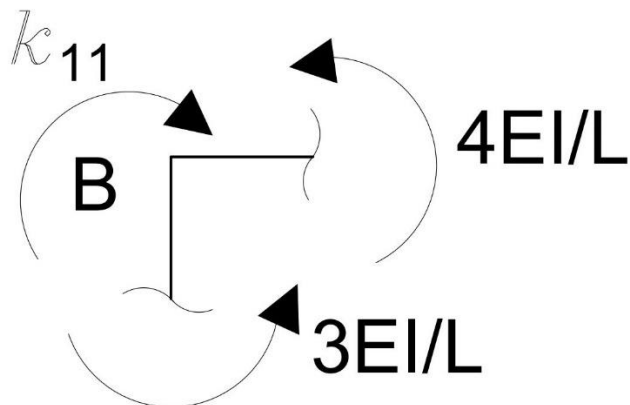
Slika 4.3 – Dijagram okvirnog nosača uslijed djelovanja jediničnih opterećenja  $Z_1$ ,  $Z_2$  i  $Z_3$



Slika 4.4 – Dijagram okvirnog nosača uslijed djelovanja vanjskih zadanih opterećenja



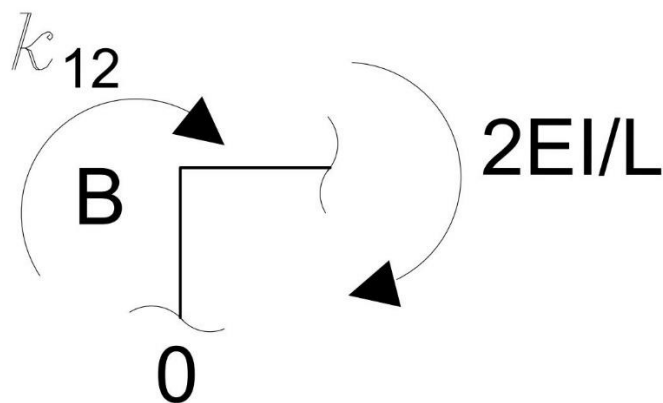
Koeficijent krutosti izračunavaju se iz uvjeta ravnoteže, gdje se isječe u blizini čvora konstrukcija i uvrste se momenti iz prethodno definiranih dijagrama.



Slika 4.5 – Koeficijent krutosti  $k_{11}$  u čvoru B

$$\sum M_B = 0:$$

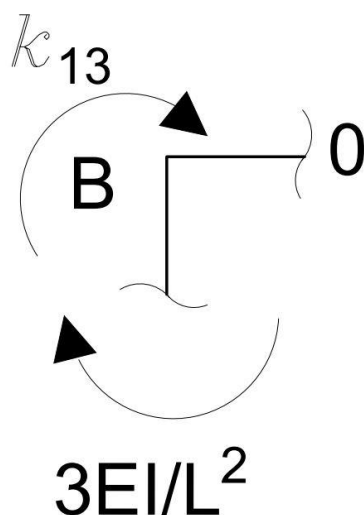
$$-k_{11} + \frac{4 \cdot E \cdot I}{L} + 3 \cdot \frac{E \cdot I}{L} = 0 \Rightarrow k_{11} = \frac{7}{4} \cdot E \cdot I$$



Slika 4.6 – Koeficijent krutosti  $k_{12}$  u čvoru B

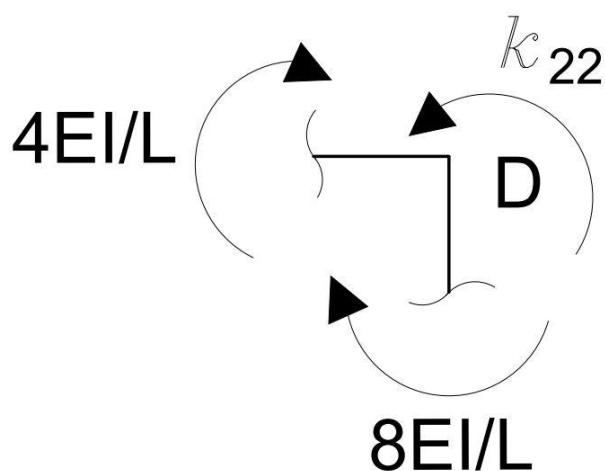
$$\sum M_B = 0:$$

$$-k_{12} - 2 \cdot \frac{E \cdot I}{L} = 0 \Rightarrow k_{12} = -\frac{1}{2} \cdot E \cdot I = k_{21}$$

Slika 4.7 – Koeficijent krutosti  $k_{13}$  u čvoru B

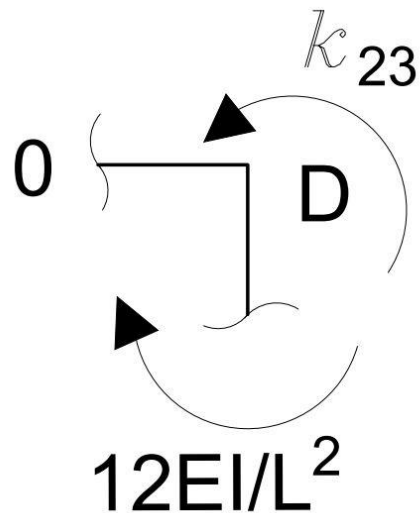
$$\sum M_B = 0:$$

$$-k_{13} - 3 \cdot \frac{E \cdot I}{L^2} = 0 \Rightarrow k_{13} = -\frac{3}{16} \cdot E \cdot I = k_{31}$$

Slika 4.8 – Koeficijent krutosti  $k_{22}$  u čvoru D

$$\sum M_D = 0:$$

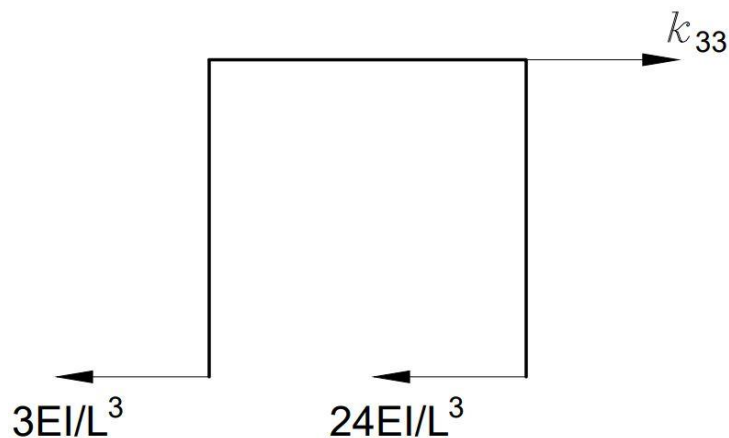
$$k_{22} - 4 \cdot \frac{E \cdot I}{L} - 8 \cdot \frac{E \cdot I}{L} = 0 \Rightarrow k_{22} = 3 \cdot E \cdot I$$

Slika 4.9 – Koeficijent krutosti  $k_{23}$  u čvoru D

$$\sum M_D = 0:$$

$$k_{23} - 12 \cdot \frac{E \cdot I}{L^2} = 0 \Rightarrow k_{23} = \frac{3}{4} \cdot E \cdot I = k_{32}$$

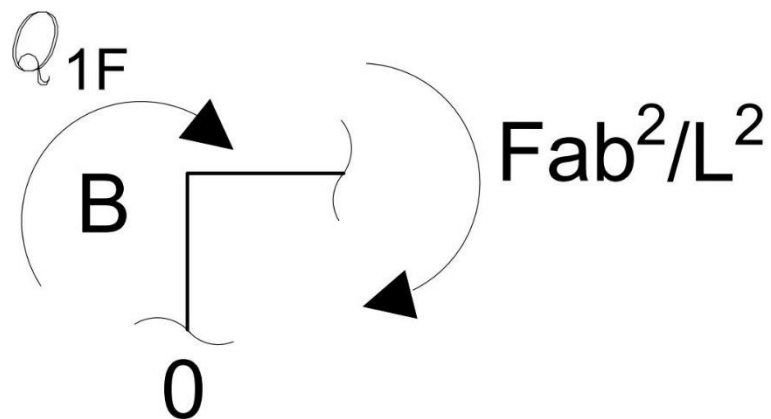
Za određivanje koeficijenta krutosti  $k_{33}$  korištena je tablica dana u prilogu.

Slika 4.10 – Koeficijent krutosti  $k_{33}$  na mjestu D uzrokovan translacijskim pomakom konstrukcije

$$\sum F_x = 0:$$

$$k_{33} - 3 \cdot \frac{E \cdot I}{L^3} - 24 \cdot \frac{E \cdot I}{L^3} = 0 \Rightarrow k_{33} = \frac{27}{64} \cdot E \cdot I$$

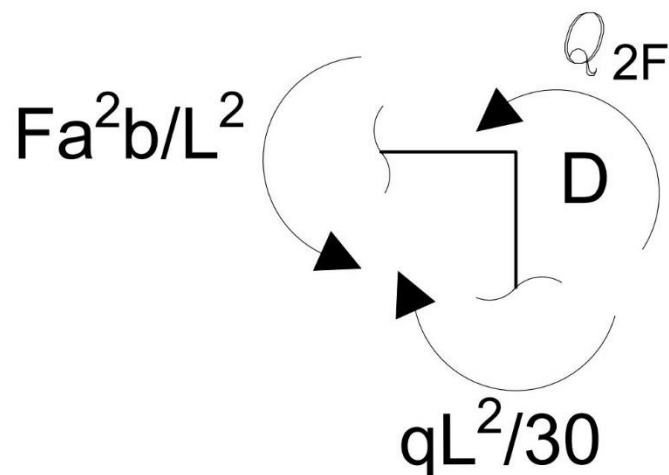
Slobodni članovi izračunavaju se iz uvjeta ravnoteže, gdje se isječe u blizini čvora konstrukcija i uvrste se momenti iz prethodno definiranih dijagrama.



Slika 4.11 – Slobodni član  $Q_{1F}$  u čvoru B

$$\sum M_B = 0:$$

$$-Q_{1F} - F \cdot \frac{a \cdot b^2}{L^2} = 0 \Rightarrow Q_{1F} = -\frac{45}{2}$$

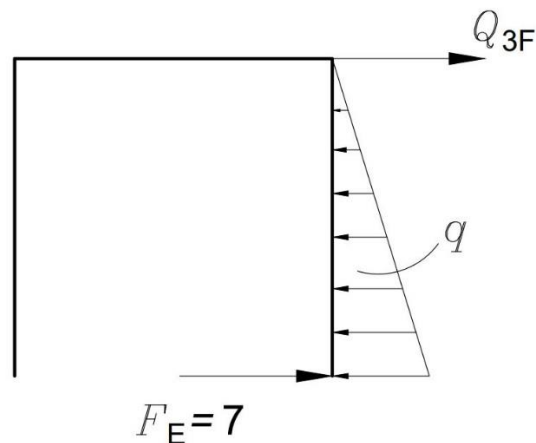


Slika 4.12 – Slobodni član  $Q_{2F}$  u čvoru D

$$\sum M_D = 0:$$

$$Q_{2F} + F \cdot \frac{a^2 \cdot b}{L^2} - \frac{q \cdot L^2}{30} = 0 \Rightarrow Q_{2F} = -\frac{29}{6}$$

Za određivanje slobodnog člana  $Q_{3F}$  korišteni su podaci u prilogu.



Slika 4.13 – Slobodni član  $Q_{3F}$  na mjestu D uzrokovan translacijskim pomakom konstrukcije

$$\sum F_x = 0:$$

$$Q_{3F} + F_E - q \cdot \frac{L}{2} = 0 \Rightarrow Q_{3F} = -F_E + q \cdot \frac{L}{2} = -7 + 5 \cdot \frac{4}{2} = 3$$

Iz kanonske jednadžbe (1.6) slijedi:

$$\begin{aligned} \frac{7}{4} \cdot E \cdot I \cdot Z_1 + -\frac{1}{2} \cdot E \cdot I \cdot Z_2 - \frac{3}{16} \cdot Z_3 - \frac{45}{2} &= 0 \\ -\frac{1}{2} \cdot E \cdot I \cdot Z_1 + 3 \cdot E \cdot I \cdot Z_2 + \frac{3}{4} \cdot Z_3 - \frac{29}{6} &= 0 \\ -\frac{3}{16} \cdot E \cdot I \cdot Z_1 + \frac{3}{4} \cdot E \cdot I \cdot Z_2 + \frac{27}{64} \cdot Z_3 + 3 &= 0 \end{aligned}$$

Koristeći programski paket u softveru „MDSolids“ rješavanja tri jednadžbe s tri nepoznanice (Slika 4.14) dobiveni su sljedeći rezultati:

Matrix Solution of Simultaneous Algebraic Equations

Back Edit Print

Number of Equations	1	2	3	Unknowns	Constants
3	1,75	-0,5	-0,1875	13,44430	22,5
	-0,5	3	0,75	7,44205	4,83
	-0,1875	0,75	0,4219	-14,36532	-3

Compute

Slika 4.14 – Rezultati dobiveni unošenjem tri jednadžbe s tri nepoznanice

Sada su poznate sve vrijednosti za određivanje momenta savijanja:

$$Z_1 = 13,44 \cdot \frac{1}{E \cdot I}$$

$$Z_2 = 7,44 \cdot \frac{1}{E \cdot I} \quad .$$

$$Z_3 = -14,36 \cdot \frac{1}{E \cdot I}$$

Za određivanje momenta savijanja u karakterističnim točkama koristi se sljedeća jednadžba:

$$M_{y,T} = m_{y,1} \cdot Z_1 + m_{y,2} \cdot Z_2 + m_{y,3} \cdot Z_3 + M_{y,F}$$

U karakterističnim točkama su dobivene sljedeće vrijednosti momenta savijanja:

$$M_{y,A} = 0 \cdot 13,44 \cdot \frac{1}{E \cdot I} + 0 \cdot 7,44 \cdot \frac{1}{E \cdot I} + 0 \cdot \left( -14,36 \cdot \frac{1}{E \cdot I} \right) + 0 = 0 \text{ kN} \cdot \text{m} ;$$

$$M_{y,B}^{A-B} = -\frac{3}{4} \cdot E \cdot I \cdot 13,44 \cdot \frac{1}{E \cdot I} + 0 \cdot 7,44 \cdot \frac{1}{E \cdot I} + \frac{3}{16} \cdot E \cdot I \cdot (-14,36) \cdot \frac{1}{E \cdot I} + 0 = -12,78 \text{ kN} \cdot \text{m} ;$$

$$M_{y,B}^{B-D} = E \cdot I \cdot 13,44 \cdot \frac{1}{E \cdot I} - \frac{1}{2} \cdot E \cdot I \cdot 7,44 \cdot \frac{1}{E \cdot I} + 0 \cdot (-14,36) \cdot \frac{1}{E \cdot I} - 22,5 = -12,78 \text{ kN} \cdot \text{m} ;$$

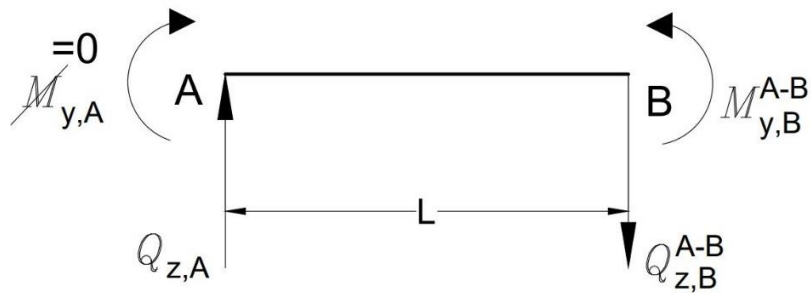
$$M_{y,C} = \frac{5}{8} \cdot E \cdot I \cdot 13,44 \cdot \frac{1}{E \cdot I} - \frac{1}{8} \cdot E \cdot I \cdot 7,44 \cdot \frac{1}{E \cdot I} + 0 \cdot (-14,36) \cdot \frac{1}{E \cdot I} + 11,25 = 18,72 \text{ kN} \cdot \text{m} ;$$

$$M_{y,D}^{B-D} = -\frac{1}{2} \cdot E \cdot I \cdot 13,44 \cdot \frac{1}{E \cdot I} + E \cdot I \cdot 7,44 \cdot \frac{1}{E \cdot I} + 0 \cdot (-14,36) \cdot \frac{1}{E \cdot I} - 7,5 = -6,78 \text{ kN} \cdot \text{m} ;$$

$$M_{y,D}^{D-E} = 0 \cdot 13,44 \cdot \frac{1}{E \cdot I} - 2 \cdot E \cdot I \cdot 7,44 \cdot \frac{1}{E \cdot I} - \frac{3}{4} \cdot E \cdot I \cdot (-14,36) \cdot \frac{1}{E \cdot I} - 2,67 = -6,78 \text{ kN} \cdot \text{m} ;$$

$$M_{y,E} = 0 \cdot 13,44 \cdot \frac{1}{E \cdot I} + E \cdot I \cdot 7,44 \cdot \frac{1}{E \cdot I} + \frac{3}{4} \cdot E \cdot I \cdot (-14,36) \cdot \frac{1}{E \cdot I} - 4 = -7,33 \text{ kN} \cdot \text{m} .$$

Sada kada su poznati momenti savijanja može se pristupiti određivanju poprečnih sila.



Slika 4.15 – Dio okvirnog nosača AB (poprečne sile)

$$\sum M_B = 0:$$

$$M_{y,B}^{A-B} - Q_{z,A} \cdot L = 0$$

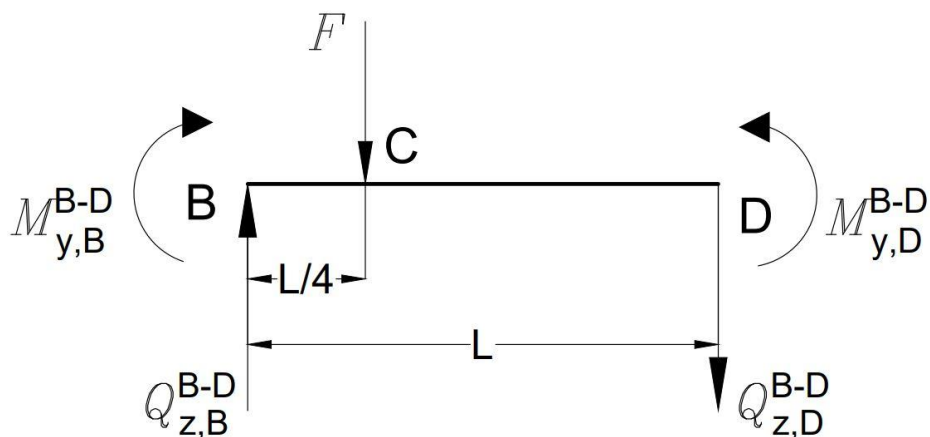
$$4 \cdot Q_{z,A} = -12,78 / : 4$$

$$Q_{z,A} = -3,195 \text{ kN};$$

$$\sum F_z = 0:$$

$$-Q_{z,A} + Q_{z,B}^{A-B} = 0$$

$$Q_{z,B}^{A-B} = Q_{z,A} = -3,195 \text{ kN}.$$



Slika 4.16 – Dio okvirnog nosača BD (poprečne sile)

$$\sum M_B = 0:$$

$$-M_{y,B}^{B-D} - F \cdot \frac{L}{4} - Q_{z,D}^{B-D} \cdot L + M_{y,D}^{B-D} = 0$$

$$12,78 - 40 \cdot \frac{4}{4} - Q_{z,D}^{B-D} \cdot 4 - 6,78 = 0$$

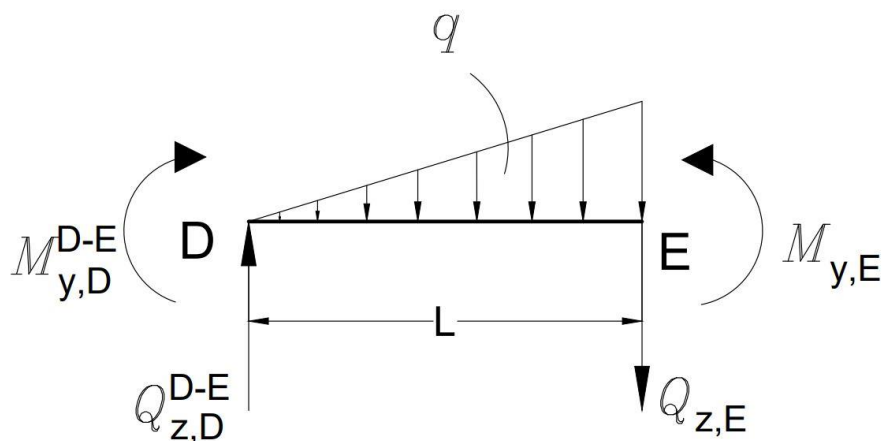
$$4 \cdot Q_{z,D}^{B-D} = -34 \Rightarrow Q_{z,D}^{B-D} = -8,5 \text{ kN};$$

$$\sum F_z = 0:$$

$$-Q_{z,B}^{B-D} + Q_{z,D}^{B-D} + F = 0$$

$$Q_{z,B}^{B-D} - 8,5 + 40$$

$$Q_{z,B}^{B-D} = 31,5 \text{ kN}.$$



Slika 4.17 – Dio okvirnog nosača DE (poprečne sile)

Koristeći uvjete ravnoteže za dio okvirnog nosača DE poprečne sile se određuju na sljedeći način:

$$\sum M_D = 0:$$

$$M_{y,E} - M_{y,D}^{D-E} - q \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{2 \cdot L}{3} - Q_{z,E} \cdot L = 0$$

$$4 \cdot Q_{z,E} = -7,33 + 6,78 - 5 \cdot \frac{4}{2} \cdot \frac{2 \cdot 4}{3}$$

$$4 \cdot Q_{z,E} = -27,22 \Rightarrow Q_{z,E} = -6,8 \text{ kN};$$



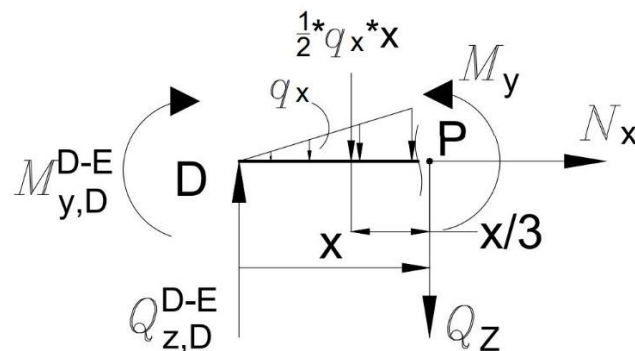
$$\sum F_z = 0:$$

$$-Q_{z,D}^{D-E} + Q_{z,E} + q \cdot \frac{L}{2} = 0$$

$$Q_{z,D}^{D-E} = -6,8 + 10 = 3,2$$

$$Q_{z,D}^{D-E} = 3,2 \text{ kN}.$$

Iz izračunatih poprečnih sila vidljivo je da postoji lokalni ekstrem, a on se izračuna presijecanjem na nekom proizvoljno odabranom području (x) u nosaču DE.



Slika 4.18 – Presjek nosača DE za određivanje ekstrema

$$\sum F_z = 0: \quad q_x = \frac{q \cdot x}{L}$$

$$Q_z - Q_{z,D}^{D-E} + q_x \cdot \frac{x}{2} = 0$$

$$Q_z = 3,2 - \frac{q \cdot x}{L} \cdot \frac{x}{2}$$

$$Q_z = 3,2 - 0,625 \cdot x^2.$$

Najveći moment u nosaču DE biti će ostvaren kada je poprečna sila jednaka nuli ( $Q_z = 0$ ), pa iz ovoga slijedi da udaljenost (x) od početka nosača do ekstrema iznosi:

$$Q_z = -0,625 \cdot x^2 + 3,2 \Rightarrow 0,625 \cdot x^2 = 3,2 \Rightarrow x = 2,26 \text{ m}.$$

$$\sum M_P = 0:$$

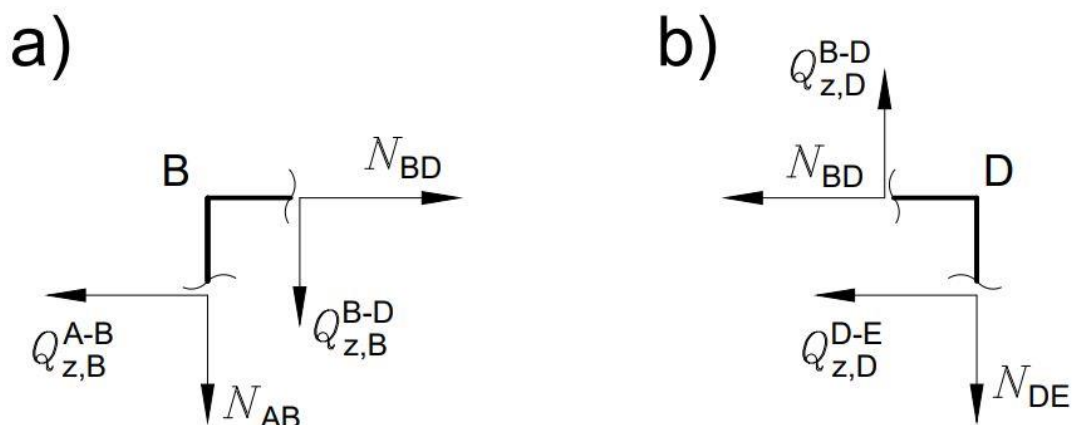
$$M_y - Q_{z,D}^{D-E} \cdot x + q_x \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} - M_{y,D}^{D-E} = 0$$

$$M_y = -0,2083 \cdot x^3 + 3,2 \cdot x - 6,78$$

$$M_{y(\max)} \text{ za } x=2,26 \text{ m} \Rightarrow -0,2083 \cdot 2,26^3 + 3,2 \cdot 2,26 - 6,78$$

$$M_{y(\max)} = -1,95 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$

Uzdužne sile se mogu izračunati iz presjeka na mjestima B i D:



Slika 4.19 – Presjek na mjestu B (a) i presjek na mjestu D (b) (uzdužne sile)

Presjek B:

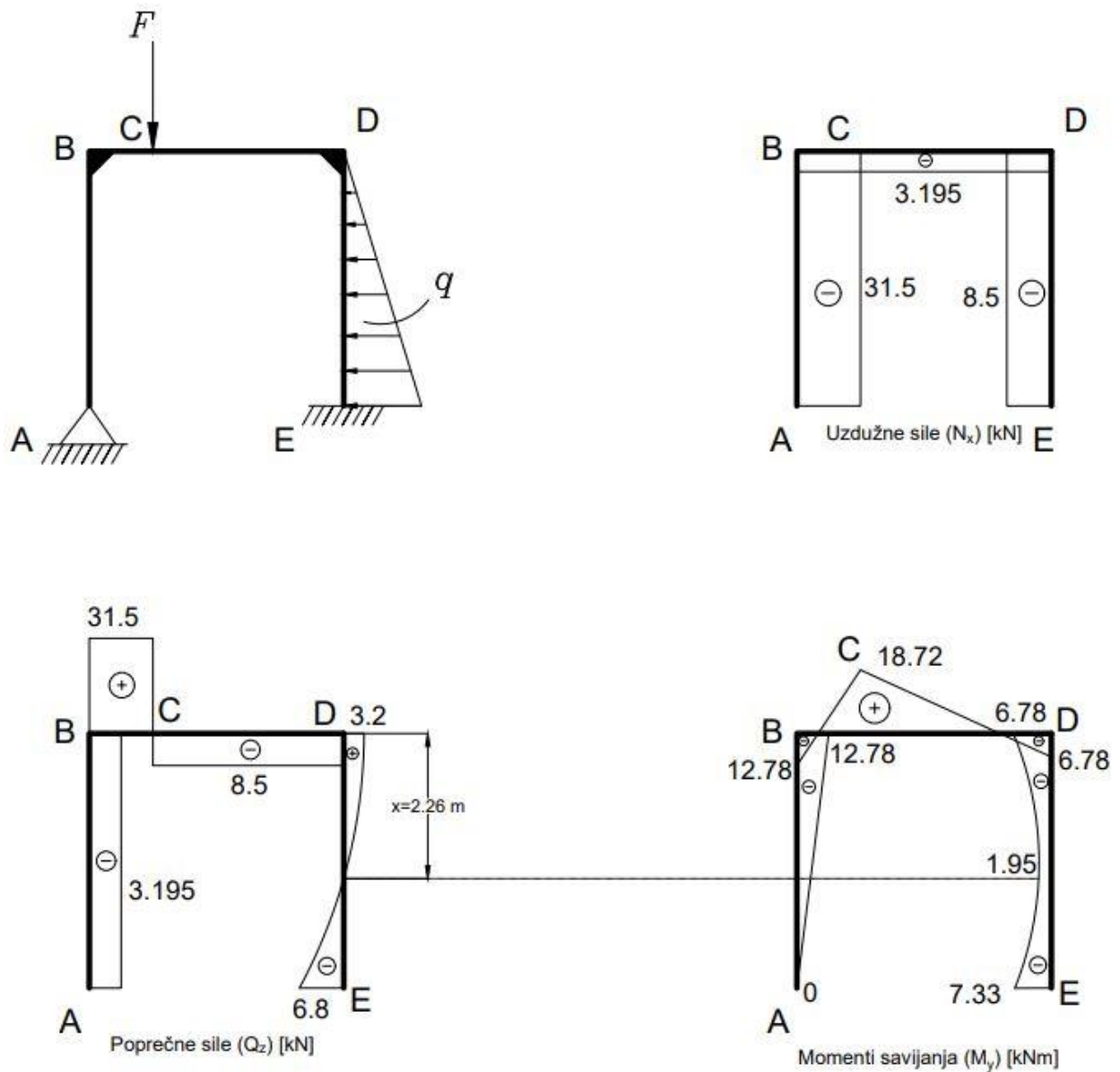
$$\sum F_x = 0: \quad N_{BD} - Q_{z,B}^{A-B} = 0 \Rightarrow N_{BD} = Q_{z,B}^{A-B} = -3,195 \text{ kN};$$

$$\sum F_z = 0: \quad N_{AB} + Q_{z,B}^{B-D} = 0 \Rightarrow N_{AB} = -Q_{z,B}^{B-D} = -31,5 \text{ kN}.$$

Presjek D:

$$\sum F_z = 0: \quad N_{DE} - Q_{z,D}^{B-D} = 0 \Rightarrow N_{DE} = Q_{z,D}^{B-D} = -8,5 \text{ kN}.$$

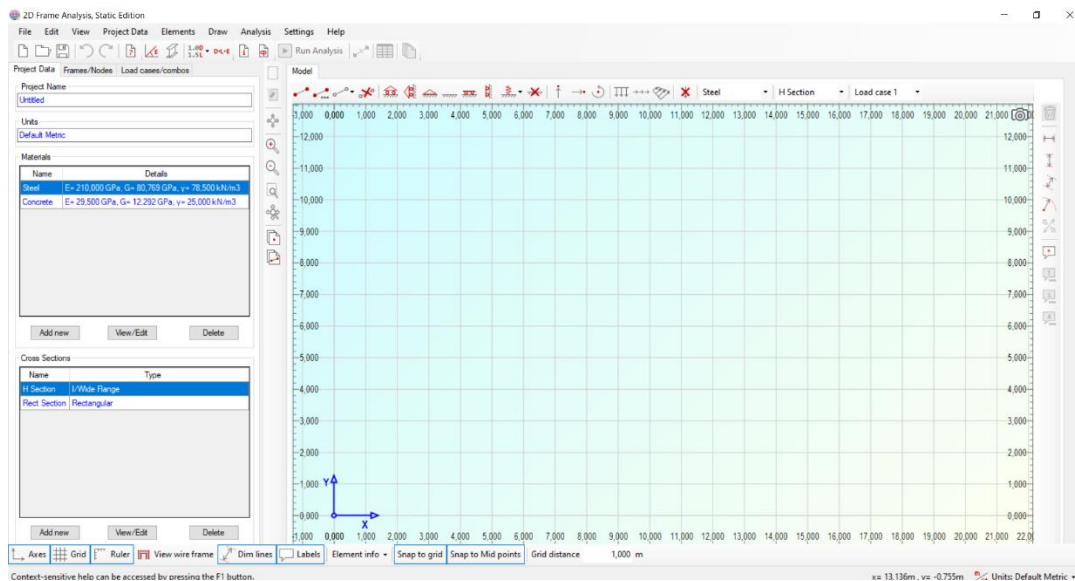
Posljednji korak u zadatku je nacrtati dijagrame unutarnjih opterećenja (uzdužne sile, poprečne sile i momenti savijanja).



Slika 4.20 – Dijagrami unutarnjih opterećenja okvirnog nosača metodom pomaka

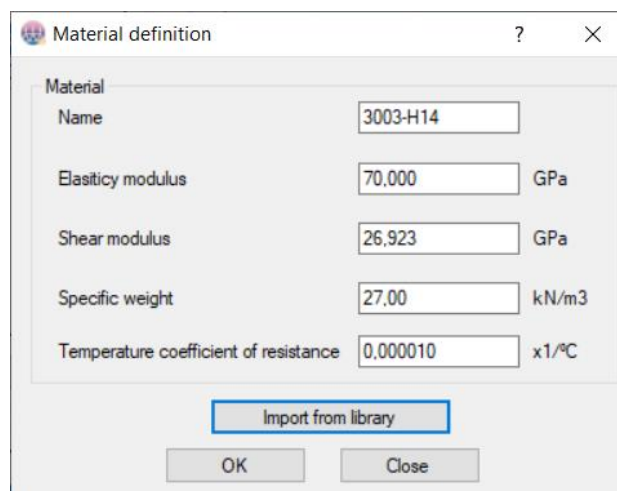
## 5. Programski paket 2D Frame Analysis

Programski paket 2D Frame Analysis se koristi za rješavanje statički i kinematički određenih i neodređenih greda, okvira i rešetki. Prilikom otvaranja programa prikaže se glavni prozor sa koordinatnim sustavom gdje je pozitivna os x (apscisa) slijeva na desno, a pozitivna os y (ordinata) od dolje prema gore (Slika 5.1) [5].



Slika 5.1 – Prikaz glavnog izbornika programskog paketa 2D Frame Analysis

U programskom paketu 2D Frame Analysis moguć je izbor materijala sa karakterističnim svojstvima od kojeg će biti izrađena promatrana greda, okvirni nosač ili rešetka. Svojstva materijala koja se mogu korigirati su prikazana na sjedećoj slici (Slika 5.2).



Slika 5.2 – Izbornik za odabir materijala od kojeg će konstrukcija ili njezin segment biti izrađen

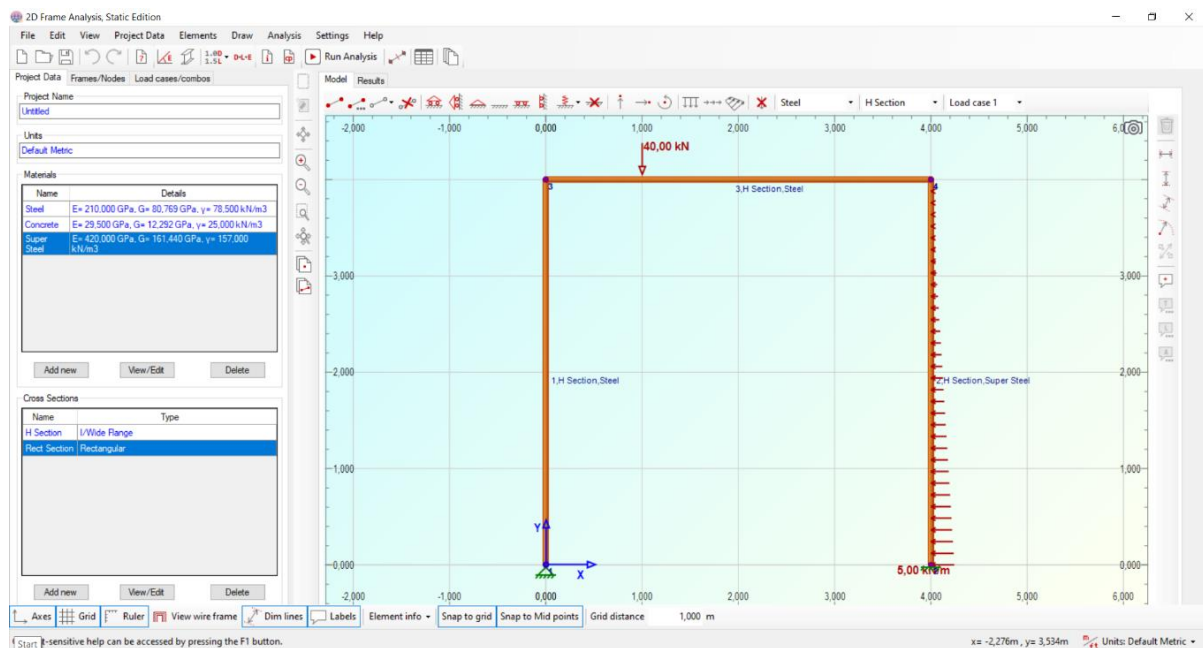
Programski paket 2D Frame Analysis ima mogućnost postavljanja oslonaca (pomičnih, nepomičnih, opruga...), a što se tiče opterećenja, može se postaviti koncentrirana sila, moment, te kontinuirano opterećenje koje može biti jednoliko ili nejednoliko (Slika 5.3) [5].



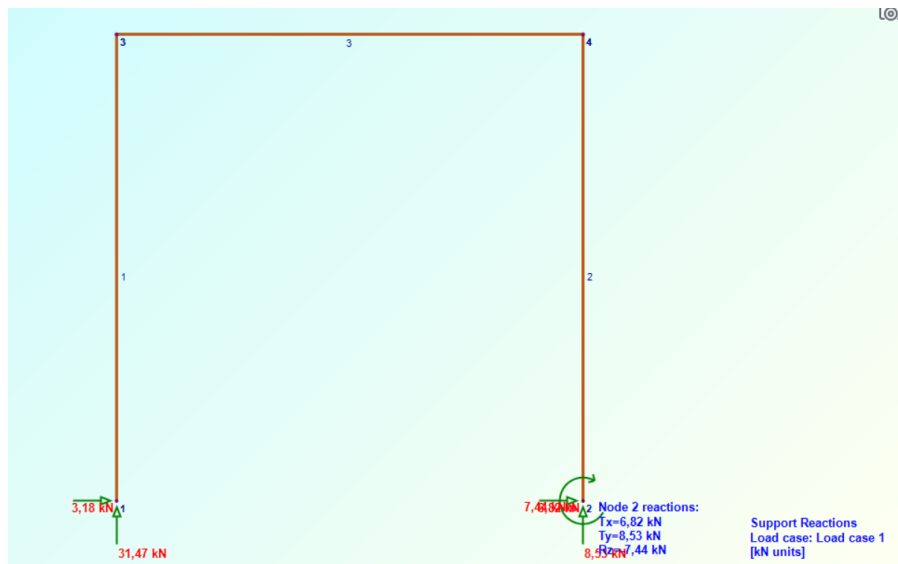
Slika 5.3 – Alatna traka sa prikazom mogućnosti odabira oslonaca, sila, momenata...

Za potrebe završnog rada izvršena je provjera rezultata uzdužnih sila, poprečnih sila i momenata savijanja dobivenih rješavanjem metodom sila i pomaka okvirnog nosača u softveru 2D Frame Analysis.

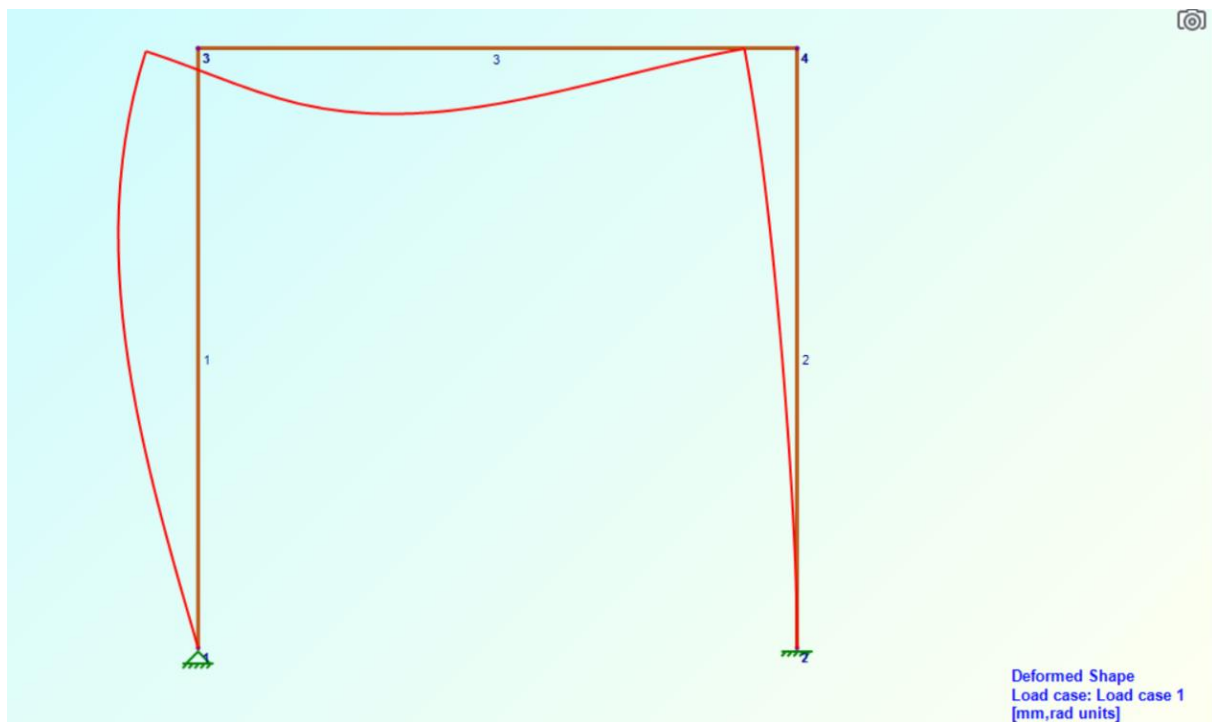
Klikom na ikonu „Run Analysis“ dobiju se rezultati prikazani na sljedećim slikama.



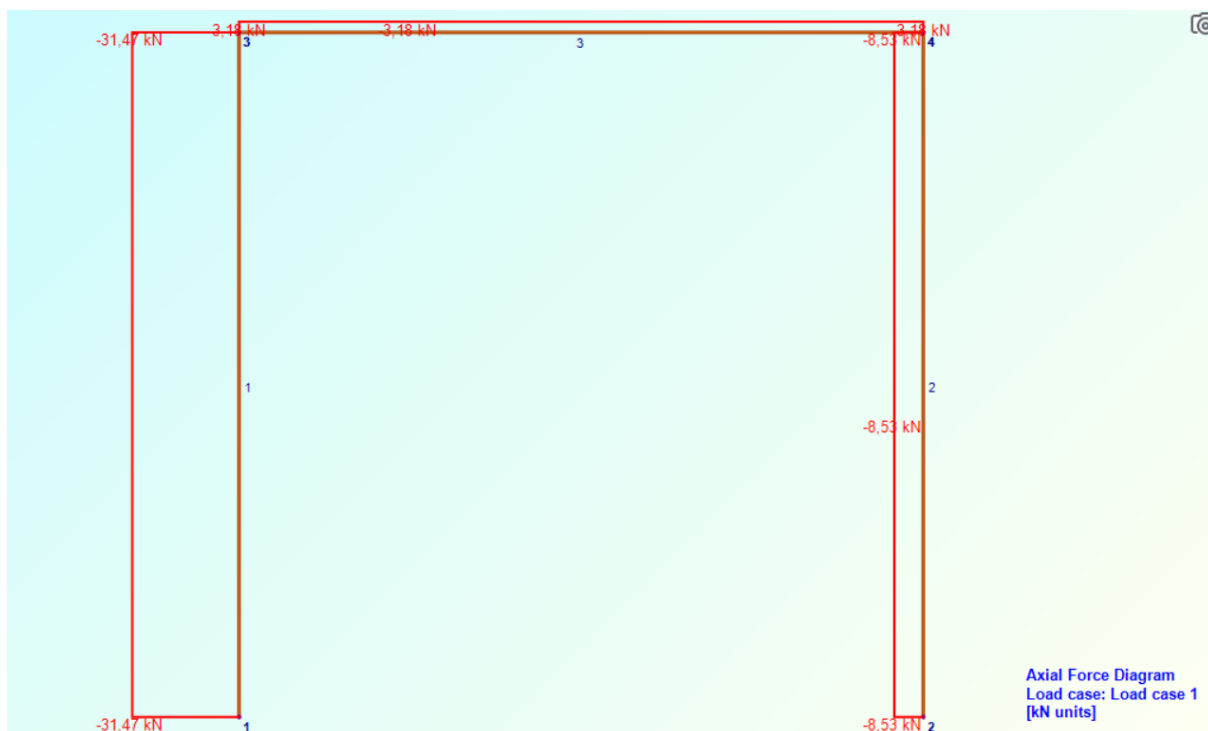
Slika 5.4 – Prikaz okvirnog nosača u 2D Frame Analysisu



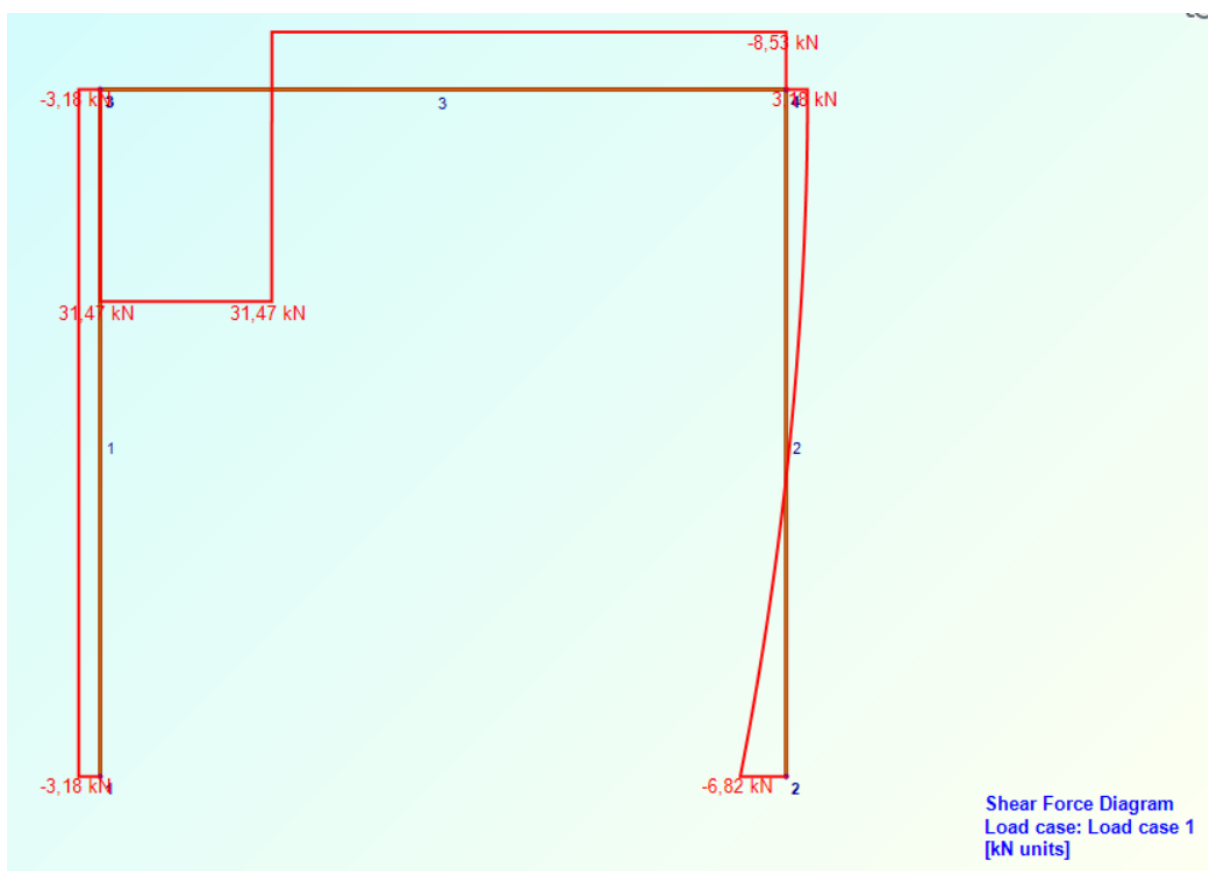
Slika 5.5 – Reakcije u osloncima



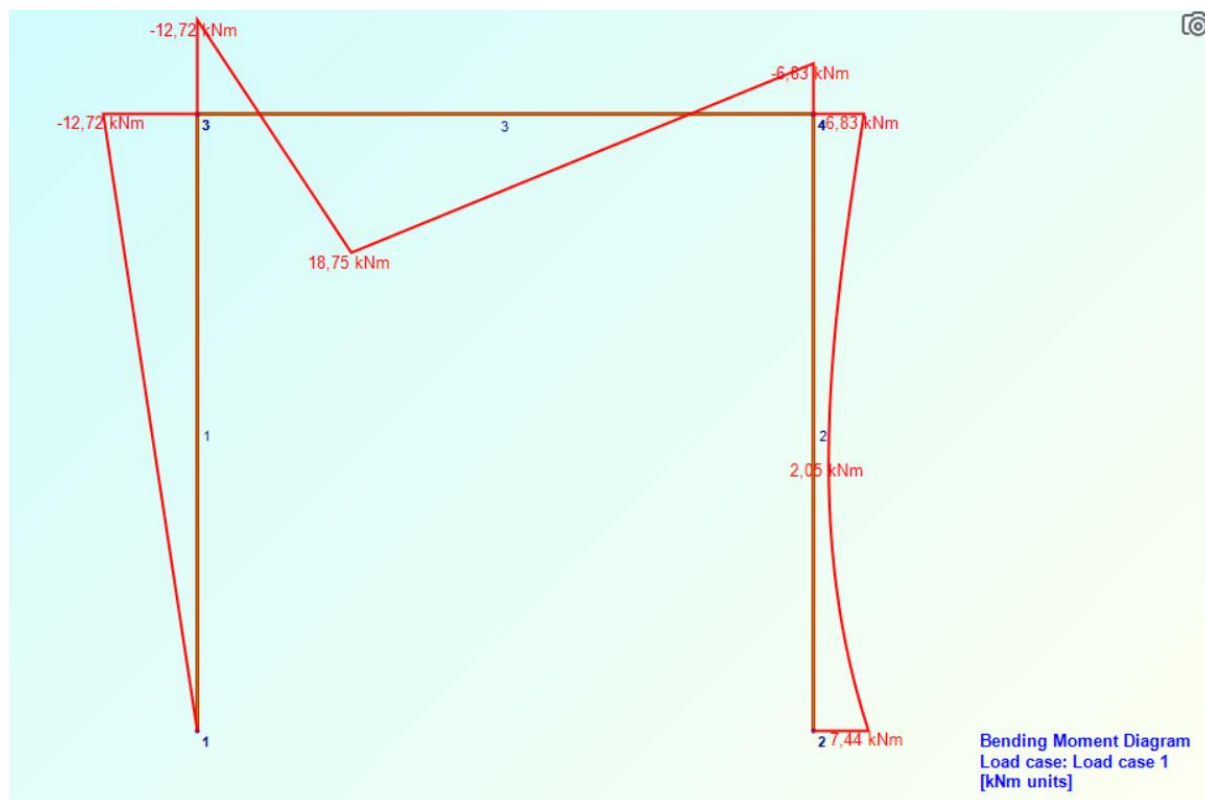
Slika 5.6 – Deformacija okvirnog nosača uzrokovana djelovanjem vanjskih opterećenja



Slika 5.7 – Prikaz uzdužnih sila u 2D Frame Analysisu



Slika 5.8 – Prikaz poprečnih sila u 2D Frame Analysisu



Slika 5.9 – Prikaz momenata savijanja u 2D Frame Analysisu

Vidljivo je iz priloženih slika da je u 2D Frame Analysisu korišten drukčiji koordinatni sustav nego u proračunu, odnosno os  $z$  je u suprotnom smjeru. Uspoređivanjem rezultata dobivenih proračunom s onima dobivenim u 2D Frame Analysis, može se reći s inženjerske strane da međusobno odgovaraju. Razlog što postoje mala odstupanja je taj što se proračunom kod zaokruživanja dobivenih vrijednosti gubi na točnosti.



## 6. Zaključak

Nakon usporedbe metode sila i metode pomaka u uvodnom dijelu završnog rada, riješena su dva zadatka. Prvi zadatak je riješen primjenom metode sile, dok je drugi zadatak riješen i pomoću metode sila i metode pomaka.

U prvom zadatku najveća uzdužna sila je dobivena na dijelu okvirnog nosača AB i iznosila je 33,025 kN, dok je najveća poprečna sila također imala isti iznos, ali se pojavila na dijelu okvirnog nosača BD. Najveći moment savijanja se pojavio na dijelu nosača BD i iznosio je 20,925 kN\*m.

U drugom zadatku najveća uzdužna sila dobivena je na dijelu okvirnog nosača AB i iznosila je 31,5 kN, dok je najveća poprečna sila također imala isti iznos, ali se pojavila na dijelu okvirnog nosača BD. Najveći moment savijanja se pojavio na dijelu nosača BD i iznosio je 18,72 kN\*m.

Iz dobivenih rezultata je vidljivo da se zamjenom zgloba iz prvog zadatka i uvođenjem kutnog zavora u drugom zadatku dobiju nešto manji maksimalni iznosi uzdužnih sila, poprečnih sila i momenata savijanja, pa je sa gledišta unutarnjeg opterećenja bolja izvedba konstrukcije sa kutnim zavarom.

## Literatura

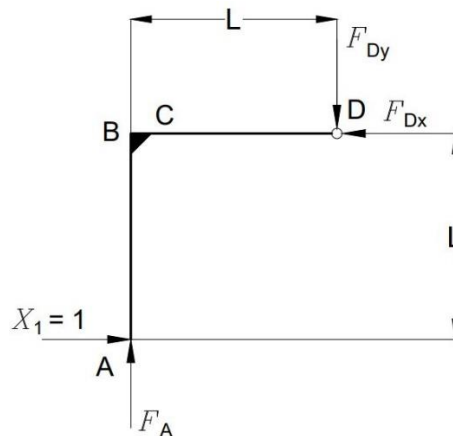
1. Plazibat B, Matoković A, Vetma V.: Tehnička mehanika I, skripta e-izdanje, Sveučilište u Splitu, Sveučilišni odjel za stručne studije, Split 2018.
2. Plazibat B, Matoković A, Vetma V.: Čvrstoća konstrukcija, skripta e-izdanje, Sveučilište u Splitu, Sveučilišni odjel za stručne studije, Split 2021.
3. <https://zir.nsk.hr/islandora/object/gradst%3A1921/datastream/PDF/view>
4. <https://dabar.srce.hr/islandora/object/gradst%3A1921>
5. <https://zir.nsk.hr/islandora/object/ossst:1490>

## Prilozi

1. Prilog 1 – Određivanje dijagrama za jedanput statički neodređen zadatak metodom sila
2. Prilog 2 – Određivanje dijagrama dvaput statički neodređenog zadatka metodom sila za rješavanje triput kinematički neodređenog zadatka metodom pomaka
3. Prilog 3 – Dijagrami za određivanje površine i težišta likova
4. Prilog 4 – Dijagrami za određivanje translacijskog pomaka i dijagrama momenta savijanja
5. Prilog 5 – Cjelokupan izvještaj rezultata dobivenih u programskom paketu 2D Frame Analysis

**Prilog 1**

Poznato je da je suma momenata u zglobu D jednaka nuli ( $\sum M_D=0$ ), pa se okvirni nosač može osloboditi od veza i podijeliti na statički određeni dio nosača od A do D (Slika 1) i na statički određeni dio nosača od D do E (Slika 2).



Slika 1 – Dio okvirnog nosača AD s nepoznatim reakcijama u osloncu A i zglobu D

Tri uvjeta ravnoteže za dio nosača AD su:

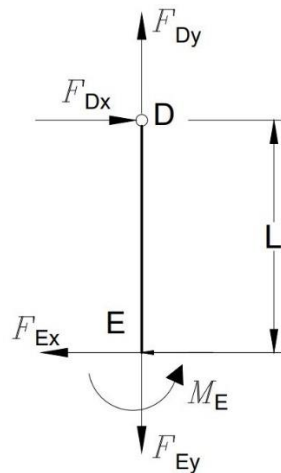
- 1)  $\sum F_x=0: X_1 - F_{Dx} = 0;$
- 2)  $\sum F_y=0: F_A - F_{Dy} = 0;$
- 3)  $\sum M_D=0: X_1 \cdot L - F_A \cdot L = 0 \quad / : L.$

Iz prethodno postavljenih uvjeta ravnoteže se dobije:

$$3) X_1 = F_A = 1 \text{ kN};$$

$$2) F_{Dy} = F_A = 1 \text{ kN};$$

$$1) F_{Dx} = X_1 = 1 \text{ kN}.$$



Slika 2 – Dio okvirnog nosača DE s nepoznatim reakcijama u uklještenju E

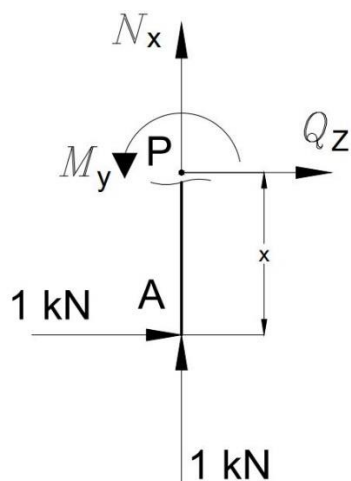
Tri uvjeta ravnoteže za dio nosača DE su:

- 1)  $\sum F_x = 0: F_{Dx} - F_{Ex} = 0;$
- 2)  $\sum F_y = 0: F_{Dy} - F_{Ey} = 0;$
- 3)  $\sum M_D = 0: M_E - F_{Ex} \cdot L = 0 .$

Iz prethodno postavljenih uvjeta ravnoteže se dobije:

- 1)  $F_{Dx} = F_{Ex} = 1 \text{ kN};$
- 2)  $F_{Dy} = F_{Ey} = 1 \text{ kN};$
- 3)  $M_E = F_{Ex} \cdot L = 1 \cdot 4 = 4 \text{ kN} \cdot \text{m} .$

Poznate su reakcije u osloncu A, zglobu D i uklještenju E pod djelovanjem jedinične reakcije  $X_1$ , pa je sljedeći korak pronalaženje unutarnjih reakcija u karakterističnim područjima.



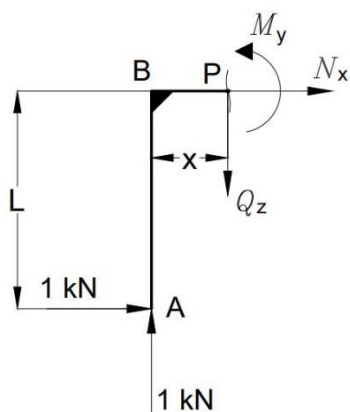
Slika 3 – Područje AB pod djelovanjem jedinične reakcije

$$\sum M_P = 0: M_y + 1 \cdot x = 0;$$

$$M_y = -x;$$

$$\text{za } x = 0; M_y = 0 \text{ kN} \cdot \text{m};$$

$$\text{za } x = 4; M_y = -4 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$



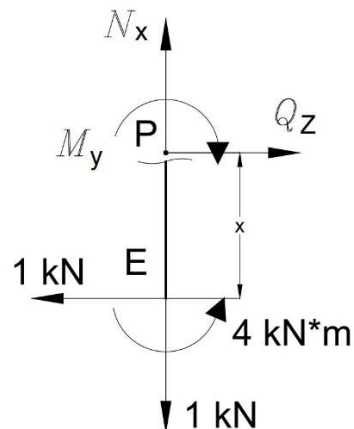
Slika 4 – Područje BD pod djelovanjem jedinične reakcije

$$\sum M_P = 0: M_y + 1 \cdot L - 1 \cdot x = 0;$$

$$M_y = -L + x;$$

$$\text{za } x = 0; M_y = -4 \text{ kN} \cdot \text{m};$$

za  $x = 4$ ;  $M_y = 0 \text{ kN} \cdot \text{m}$  .



Slika 5 – Područje DE pod djelovanjem jedinične reakcije

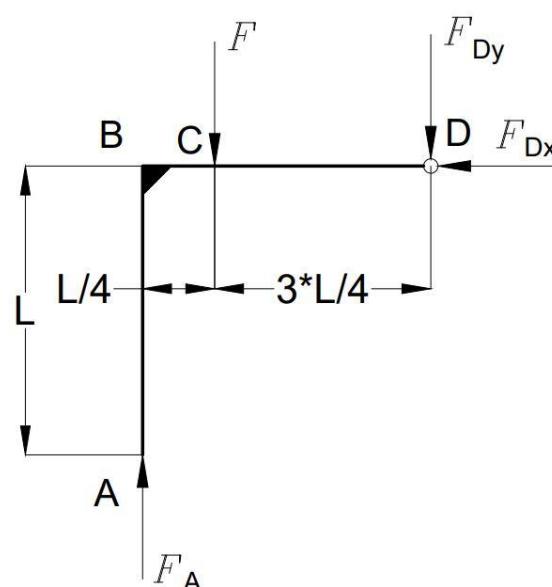
$$\sum M_P = 0: -M_y + 4 - 1 \cdot x = 0;$$

$$M_y = -x + 4;$$

za  $x = 0$ ;  $M_y = 4 \text{ kN} \cdot \text{m}$  ;

za  $x = 4$ ;  $M_y = 0 \text{ kN} \cdot \text{m}$  .

Za dobivanje dijagrama pod djelovanjem vanjskih opterećenja također će se promatrati statički određeni dio nosača AD (Slika 2.8) i statički određeni dio nosača DE (Slika 2.9).



Slika 6 – Dio okvirnog nosača AD pod djelovanjem koncentrirane sile

Tri uvjeta ravnoteže za dio nosača AD su:

$$1) \sum F_x = 0: F_{Dx} = 0;$$

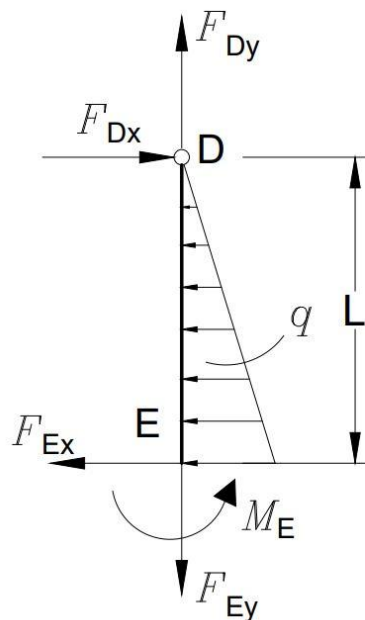
$$2) \sum F_y = 0: F_A - F - F_{Dy} = 0;$$

$$3) \sum M_D = 0: F \cdot \frac{3 \cdot \mathcal{L}}{4} - F_A \cdot \mathcal{L} = 0 \quad / : \mathcal{L}.$$

Iz prethodno postavljenih uvjeta ravnoteže se dobije:

$$3) F_A = \frac{3}{4} \cdot 40 = 30 \text{ kN};$$

$$2) F_{Dy} = 30 - 40 = -10 \text{ kN}.$$



Slika 7 – Dio okvirnog nosača DE s trokutastim opterećenjem



Tri uvjeta ravnoteže za dio nosača DE su:

$$1) \sum F_x = 0: F_{Dx} - F_{Ex} - \frac{q \cdot L}{2} = 0;$$

$$2) \sum F_y = 0: F_{Dy} - F_{Ey} = 0;$$

$$3) \sum M_D = 0: M_E - F_{Ex} \cdot L - \frac{q}{2} \cdot L \cdot \frac{2 \cdot L}{3} = 0 .$$

Iz prethodno postavljenih uvjeta ravnoteže se dobije:

$$1) F_{Ex} = -\frac{5}{2} \cdot 4 = -10 \text{ kN};$$

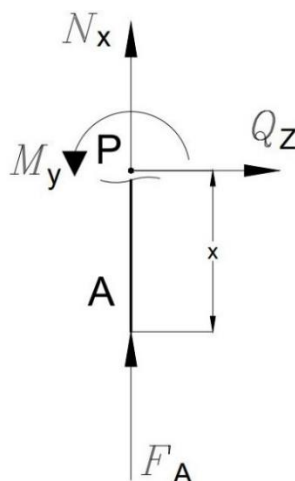
$$2) F_{Dy} = F_{Ey} = 10 \text{ kN};$$

$$3) M_E = F_{Ex} \cdot L + \frac{q}{2} \cdot L \cdot \frac{2 \cdot L}{3}$$

$$M_E = -10 \cdot 4 + \frac{5}{2} \cdot 4 \cdot \frac{2 \cdot 4}{3}$$

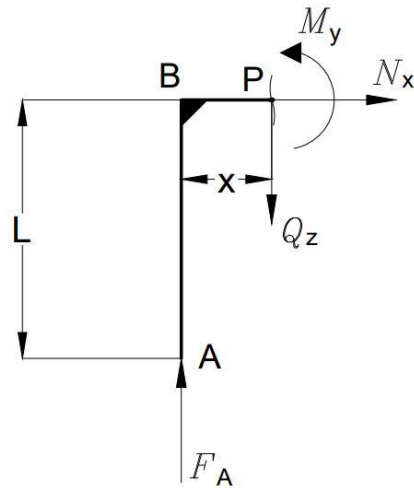
$$M_E = -13,33 \text{ kN} \cdot \text{m} .$$

Za određivanje momenata savijanja u karakterističnim točkama posljednji korak je određivanje unutarnjih reakcija presijecanjem nosača.



Slika 8 – Područje AB pod djelovanjem vanjskih reakcija

$$\sum M_P = 0: M_y = 0;$$



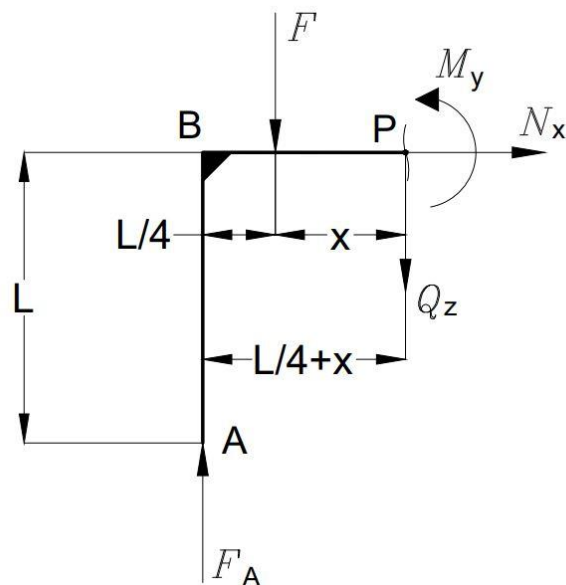
Slika 9 – Lijevi dio nosača BD pod djelovanjem vanjskih reakcija

$$\sum M_P=0: M_y - F_A \cdot x = 0;$$

$$M_y = 30 \cdot x;$$

$$\text{za } x = 0; M_y = 0 \text{ kN} \cdot \text{m};$$

$$\text{za } x = 1; M_y = 30 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$



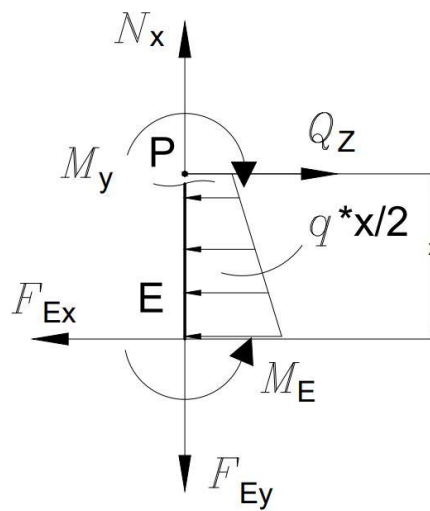
Slika 10 – Desni dio nosača BD pod djelovanjem vanjskih reakcija

$$\sum M_P=0: M_y + F \cdot x - F_A \cdot \left(\frac{L}{4} + x\right) = 0;$$

$$M_y = 30 \cdot (1 + x) - 40 \cdot x = 30 - 10 \cdot x;$$

$$\text{za } x = 0; M_y = 30 \text{ kN} \cdot \text{m} ;$$

$$\text{za } x = 3; M_y = 0 \text{ kN} \cdot \text{m} .$$



Slika 11 – Dio nosača DE pod djelovanjem vanjskih reakcija

$$\sum M_P=0: -M_y + M_E - F_{Ex} \cdot x - \frac{q \cdot x}{2} \cdot \frac{2 \cdot x}{3} = 0;$$

$$M_y = -1,67 \cdot x^2 + 10 \cdot x - 13,33;$$

$$\text{za } x = 0; M_y = -13,33 \text{ kN} \cdot \text{m} ;$$

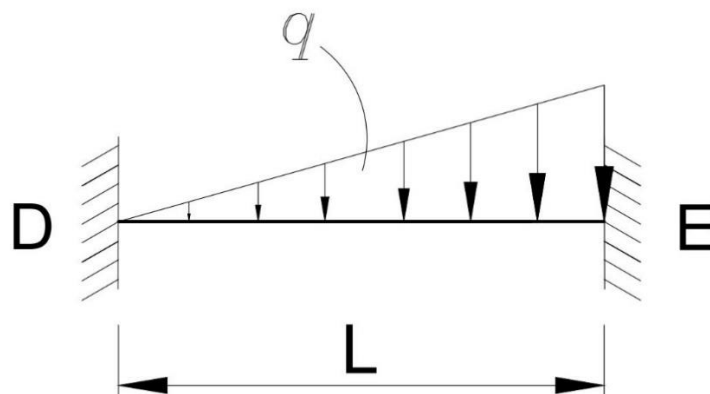
$$\text{za } x = 4; M_y = 0 \text{ kN} \cdot \text{m} .$$

**Prilog 2**

Ulazni podaci:

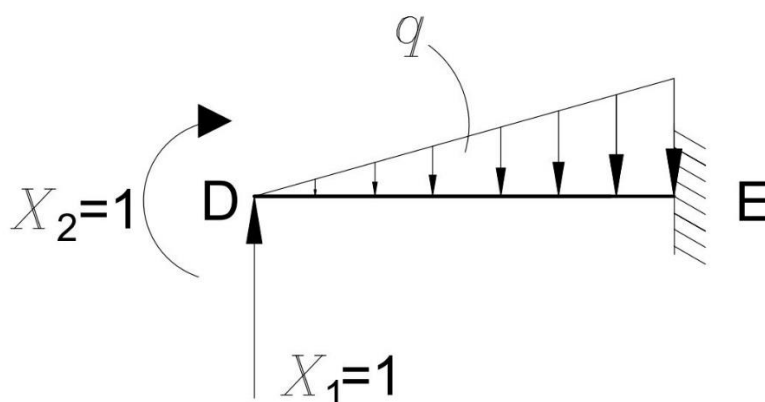
$$L = 4 \text{ m} ; 2 \cdot E \cdot I_y$$

$$q = 5 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$



Slika 12 – Uklještenu greda s trokutastim opterećenjem

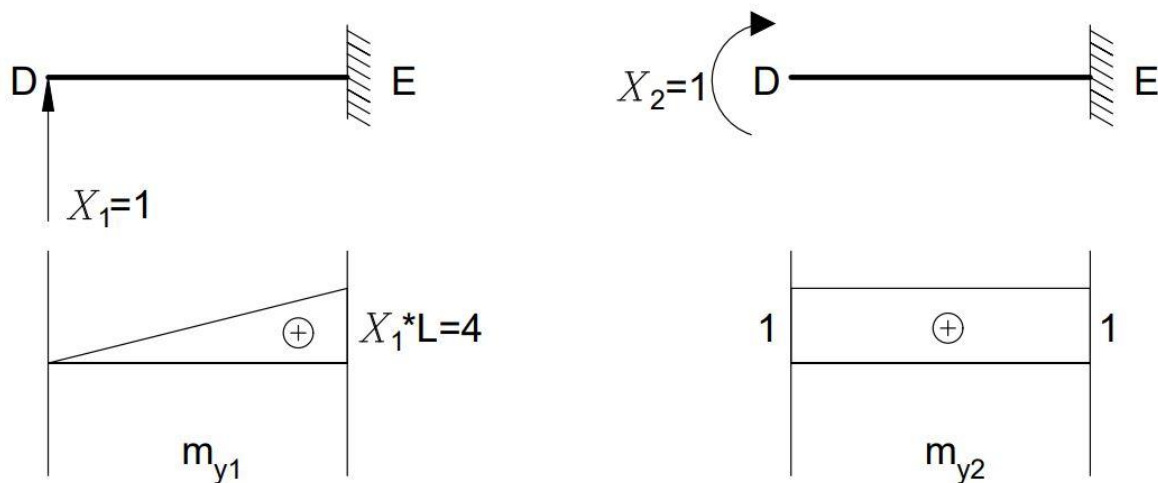
Prema jednadžbi (1.1), zadatak je dva puta statički neodređen, pa je potrebno izvršiti uklanjanje suvišnih veza u osloncu na mjestu D i postavljanje nepoznatih reakcija  $X_1$  i  $X_2$  (Slika 4.4).

Slika 13 – Uklonjeno uklještenje i zamijenjeno jediničnim reakcijama  $X_1$  i  $X_2$

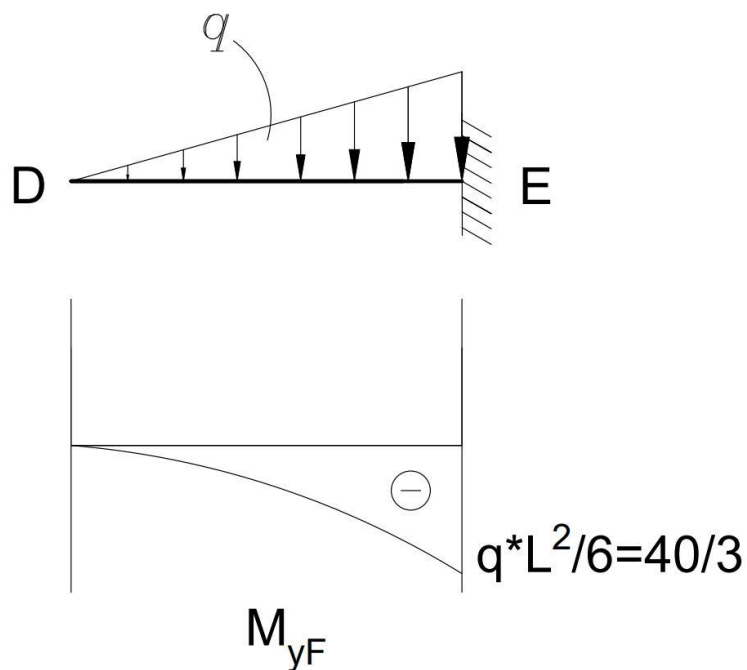
Kanonska jednadžba za dva puta statički neodređen zadatak je prema (1.4):

$$\begin{aligned} f_{11} \cdot X_1 + f_{12} \cdot X_2 + q_{1F} &= 0 \\ f_{21} \cdot X_1 + f_{22} \cdot X_2 + q_{2F} &= 0 \end{aligned}$$

Sljedeći korak je određivanje dijagrama momenta uslijed  $X_1 = 1$  i  $X_2 = 1$  (Slika 4.5), te dijagram momenta uslijed vanjskog opterećenja (Slika 4.6).



Slika 14 – Dijagrami momenta savijanja uslijed djelovanja jediničnih reakcija  $X_1=1$  i  $X_2=1$



Slika 15 – Dijagram momenta savijanja  $M_{y,F}$  uslijed zadanog vanjskog opterećenja

Koeficijenti podatnosti i slobodni članovi se određuju koristeći Mohrov integral, te Vereščaginovo pravilo:

$$f_{11} = \frac{1}{2 \cdot E \cdot I_y} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot L \cdot L \cdot \frac{2}{3} \cdot L \right) = \frac{1}{2 \cdot E \cdot I_y} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 \right) = \frac{32}{3} \cdot \frac{1}{E \cdot I_y};$$

$$f_{12} = \frac{1}{2 \cdot E \cdot I_y} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot L \cdot L \cdot 1 \right) = \frac{1}{2 \cdot E \cdot I_y} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \right) = 4 \cdot \frac{1}{E \cdot I_y} = f_{21};$$

$$f_{22} = \frac{1}{2 \cdot E \cdot I_y} \cdot (L \cdot 1 \cdot 1) = \frac{1}{2 \cdot E \cdot I_y} \cdot (4 \cdot 1 \cdot 1) = 2 \cdot \frac{1}{E \cdot I_y};$$

$$q_{1F} = \frac{1}{2 \cdot E \cdot I_y} \cdot \left( \frac{1}{4} \cdot L \cdot \left( -\frac{q \cdot L^2}{6} \right) \cdot \frac{4}{5} \cdot L \right) = \frac{1}{2 \cdot E \cdot I_y} \cdot \left( \frac{1}{4} \cdot 4 \cdot \left( -\frac{5 \cdot 4^2}{6} \right) \cdot \frac{4}{5} \cdot 4 \right) = -\frac{64}{3} \cdot \frac{1}{E \cdot I_y};$$

$$q_{2F} = \frac{1}{2 \cdot E \cdot I_y} \cdot \left( \frac{1}{4} \cdot L \cdot \left( -\frac{q \cdot L^2}{6} \right) \cdot 1 \right) = \frac{1}{2 \cdot E \cdot I_y} \cdot \left( \frac{1}{4} \cdot 4 \cdot \left( -\frac{5 \cdot 4^2}{6} \right) \right) = -\frac{20}{3} \cdot \frac{1}{E \cdot I_y}.$$

Uvrštavanjem u kanonske jednadžbe se dobije:

$$\frac{32}{3} \cdot \frac{1}{E \cdot I_y} \cdot X_1 + 4 \cdot \frac{1}{E \cdot I_y} \cdot X_2 - \frac{64}{3} \cdot \frac{1}{E \cdot I_y} = 0; \quad / 3 \cdot E \cdot I_y$$

$$4 \cdot \frac{1}{E \cdot I_y} \cdot X_1 + 2 \cdot \frac{1}{E \cdot I_y} \cdot X_2 - \frac{20}{3} \cdot \frac{1}{E \cdot I_y} = 0; \quad / -6 \cdot E \cdot I_y$$

$$32 \cdot X_1 + 12 \cdot X_2 = 64;$$

$$-24 \cdot X_1 - 12 \cdot X_2 = -40.$$

Koristeći programski paket „MDSolids“ dobili su se sljedeći rezultati za dvije jednadžbe s dvije nepoznanice:

Matrix Solution of Simultaneous Algebraic Equations

Back Edit Print

Number of Equations	1	2	Unknowns	Constants
2	32	12	3,00000	64
	-24	-12	-2,66667	-40

Compute

Slika 16 – Programski paket „MDSolids“ za određivanje nepoznanica

Za određivanje momenta savijanja u karakterističnim točkama koristi se sljedeća jednadžba:

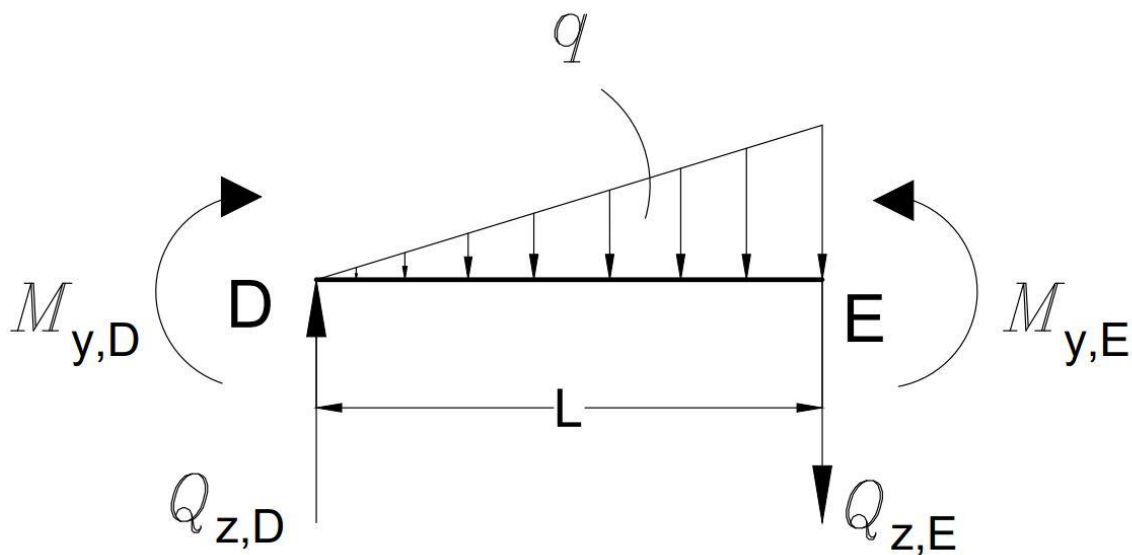
$$M_{y,T} = m_{y,1} \cdot X_1 + m_{y,2} \cdot X_2 + M_{y,F}$$

U karakterističnim točkama su dobivene sljedeće vrijednosti momenta savijanja:

$$M_{y,D} = 0 \cdot 3 + 1 \cdot \left(-\frac{8}{3}\right) + 0 = -\frac{8}{3} \text{ kN} \cdot \text{m};$$

$$M_{y,E} = 4 \cdot 3 + 1 \cdot \left(-\frac{8}{3}\right) - \frac{40}{3} = -4 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$

Sada kada su poznati momenti savijanja može se pristupiti određivanju poprečnih sila.



Slika 17 – Nosač DE s poprečnim silama

Koristeći uvjete ravnoteže za nosač DE poprečne sile se određuju na sljedeći način:

$$\sum M_D = 0:$$

$$-M_{y,D} + M_{y,E} - q \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{2 \cdot L}{3} - Q_{z,E} \cdot L = 0$$

$$4 \cdot Q_{z,E} = \frac{8}{3} - 4 - 5 \cdot \frac{4}{2} \cdot \frac{2 \cdot 4}{3}$$

$$4 \cdot Q_{z,E} = -\frac{84}{3} \Rightarrow Q_{z,E} = -7 \text{ kN};$$

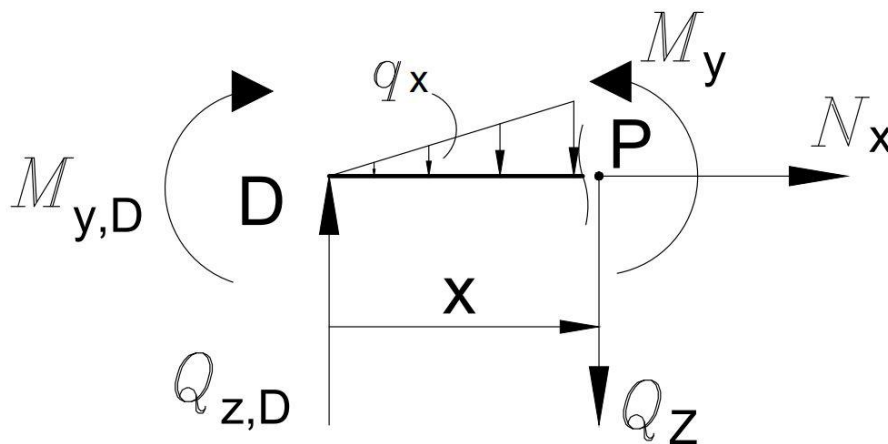
$$\sum F_z = 0:$$

$$-Q_{z,D} + Q_{z,E} + q \cdot \frac{L}{2} = 0$$

$$Q_{z,D} = -7 + 5 \cdot \frac{4}{2}$$

$$Q_{z,D} = 3 \text{ kN}.$$

Iz izračunatih poprečnih sila vidljivo je da postoji lokalni ekstrem, a on se izračuna presijecanjem na nekom proizvoljno odabranom području (x) u nosaču DE.



Slika 18 – Presjek nosača DE za određivanje ekstrema

$$\sum F_z = 0: \quad q_x = \frac{q \cdot x}{L} = 1,25 \cdot x$$

$$Q_z - Q_{z,D} + q_x \cdot \frac{x}{2} = 0$$

$$Q_z = 3 - 1,25 \cdot x \cdot \frac{x}{2}$$

$$Q_z = 3 - 0,625 \cdot x^2.$$

Najveći moment u nosaču DE biti će ostvaren kada je poprečna sila jednaka nuli ( $Q_z = 0$ ), pa iz ovoga slijedi da udaljenost (x) od početka nosača do ekstrema iznosi:

$$Q_z = -0,625 \cdot x^2 + 3 \Rightarrow 0,625 \cdot x^2 = 3 \Rightarrow x = 2,19 \text{ m}.$$



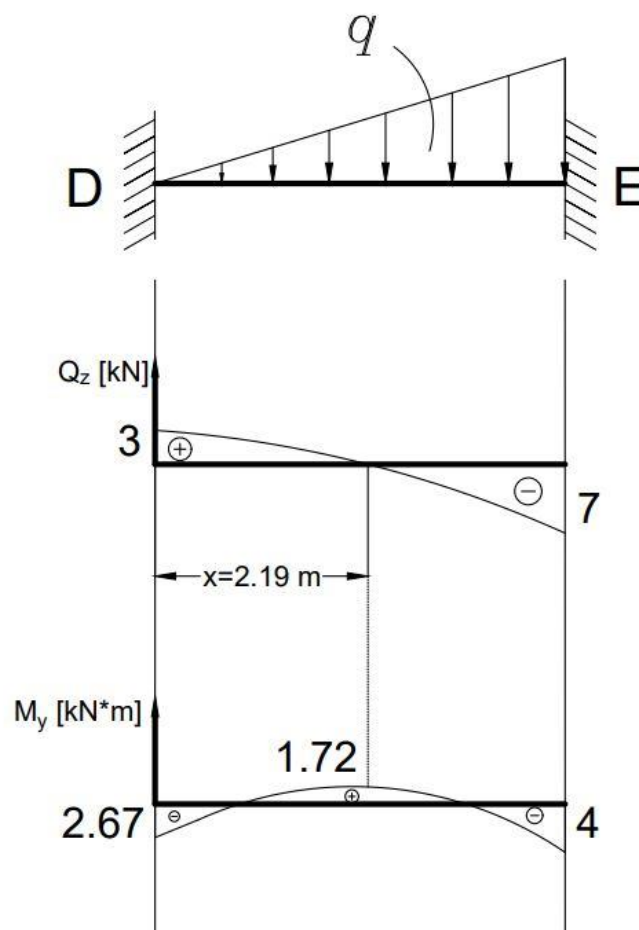
$$\sum M_P = 0:$$

$$M_y - Q_{z,D} \cdot x - M_{y,D} + q_x \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} = 0$$

$$M_y = -\frac{5}{24} \cdot x^3 + 3 \cdot x - \frac{8}{3}$$

$$M_{y(\max)} \text{ za } x=2,19 \text{ m} \Rightarrow -\frac{5}{24} \cdot 2,19^3 + 3 \cdot 2,19 - \frac{8}{3}$$

$$M_{y(\max)} = 1,72 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$



Slika 19 – Dijagrami poprečnih sila i momenta savijanja za uklještenu nosač s trokutastim opterećenjem

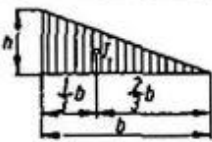
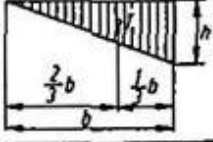
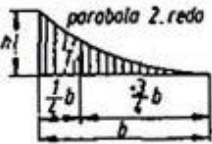
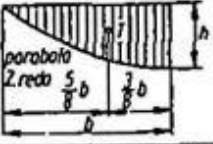
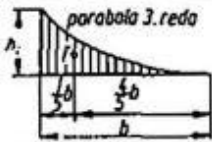
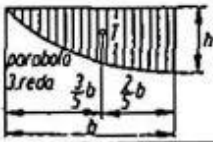
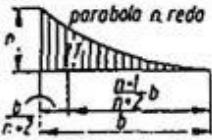
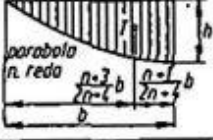
U uklještenju D se pojavljuje moment iznosa  $-2,67 \text{ kN} \cdot \text{m}$ , a u uklještenju E se pojavljuje moment iznosa  $-4 \text{ kN} \cdot \text{m}$ . Na temelju tih vrijednosti može se dobiti ekvivalentna jednadžba za isti slučaj za bilo koji iznos trokutastog opterećenja i duljine nosača:

$$M_{y,D} = -\frac{q \cdot L^2}{30} = -2,67 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad ; \quad M_{y,E} = -\frac{q \cdot L^2}{20} = -4 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$

## Prilog 3

Tablica 9.2

Položaj težišta i površine nekih likova

Lik	Površina	Lik	Površina
	$A = \frac{1}{2}bh$		$A = \frac{1}{2}bh$
	$A = \frac{1}{3}bh$		$A = \frac{2}{3}bh$
	$A = \frac{1}{4}bh$		$A = \frac{3}{4}bh$
	$A = \frac{1}{n+1}bh$		$A = \frac{n}{n+1}bh$


Slika 20 – Dijagrami s prikazom položaja težišta i pripadajućim površinama likova

Prilog 4

Shema opterećenja	Raspodjela momenata savijanja	Reakcijski momenti	Reakcijske sile
		$M_A = 4EI/l$ $M_B = 2EI/l$	$F_A = 6EI/l^2$ $F_B = 6EI/l^2$
		$M_A = 3EI/l$	$F_A = 3EI/l^2$ $F_B = 3EI/l^2$
		$M_A = 6EI/l^2$ $M_B = 6EI/l^2$	$F_A = 12EI/l^3$ $F_B = 12EI/l^3$
		$M_A = 3EI/l^2$	$F_A = 3EI/l^3$ $F_B = 3EI/l^3$
		$M_A = ql^2/12$ $M_B = ql^2/12$ $M_C = ql^2/24$	$F_A = q/2$ $F_B = q/2$
		$M_A = ql^2/8$ $M_C = 9ql^2/128$	$F_A = 5q/8$ $F_B = 3q/8$
		$M_A = Fab^2/l^2$ $M_B = Fa^2bl/l^2$ $M_C = 2Fa^2b^2/l^3$	$F_A = Fb^2(l + 2a)/l^3$ $F_B = Fa^2(l + 2b)/l^3$
		$M_A = Fb(l^2 - b^2)/(2l^3)$ $M_C = Fb^3$	$F_A = Fb(3l^2 - b^2)/(2l^3)$ $F_B = Fa^2(3l - a)/(2l^3)$
		$M_A = Mb(2l - 3b)/l^2$ $M_B = Ma(2l - 3a)/l^2$ $M_C^D = F_B b - M_B$ $M_C^L = M_A - F_A a$	$F_A = 6Mab/l^3$ $F_B = 6Mab/l^3$
		$M_A = M(l^2 - 3b^2)/(2l^3)$ $M_C^D = F_B b$ $M_C^L = M_A - F_A a$	$F_A = 3M(l^2 - b^2)/(2l^3)$ $F_B = 3M(l^2 - b^2)/(2l^3)$

Slika 21 – Prikaz pomaka nosača pri različitim slučajevima oslonaca i opterećenja te momenti i sile na karakterističnim mjestima

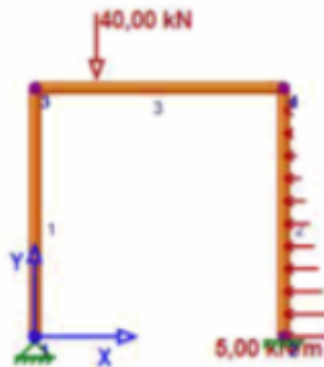
## Prilog 5


 Company: \_\_\_\_\_ Date: 02-siv-2022  
 Project: Untitled Project Number: \_\_\_\_\_

PROJECT INFORMATION	
Company	
Project Name	Untitled
Project Number	
Client Name	
Engineer	
Checker	
Supervisor	
Model Name	
Model Description	
Issue Number	
Date	02-siv-2022
Revision Number	

A. MODEL DATA (DEFINITIONS, PROPERTIES, LOADS)

MODEL GEOMETRY





Company:

Date: 02-svi-2022

Project: Untitled

Project Number:

MATERIAL DEFINITIONS				
Name	Elasticity Mod. (GPa)	Shear Mod. (GPa)	w (kN/m <sup>3</sup> )	Thermal coef. (1/C)
Steel	210,000	80,769	78,50	0,000010
Super Steel	420,000	161,440	157,00	0,000020

MATERIAL DEFINITIONS				
Name	Elasticity Mod. (GPa)	Shear Mod. (GPa)	w (kN/m <sup>3</sup> )	Thermal coef. (1/C)
Steel	210,000	80,769	78,50	0,000010
Super Steel	420,000	161,440	157,00	0,000020

CROSS SECTION DEFINITIONS				
Name: H Section				
Type: H Wide Flange				
Height: 190 mm				
Width: 200 mm				
Flange thickness: 10 mm				
Web thickness: 7 mm				
Filler radius: 18 mm				
Shear Coefficient: 0,83				
Area (cm <sup>2</sup> )	Inertia Mom. Y (cm <sup>4</sup> )	Inertia Moment Z (cm <sup>4</sup> )	Section Modulus Y (cm <sup>3</sup> )	Section Modulus Z (cm <sup>3</sup> )
54,68	3712,63	1335,71	390,80	133,57

CROSS SECTION DEFINITIONS				
Name: H Section				
Type: H Wide Flange				
Height: 190 mm				
Width: 200 mm				
Flange thickness: 10 mm				
Web thickness: 7 mm				
Filler radius: 18 mm				
Shear Coefficient: 0,83				
Area (cm <sup>2</sup> )	Inertia Mom. Y (cm <sup>4</sup> )	Inertia Moment Z (cm <sup>4</sup> )	Section Modulus Y (cm <sup>3</sup> )	Section Modulus Z (cm <sup>3</sup> )
54,68	3712,63	1335,71	390,80	133,57



Company:

Date: 02-svi-2022

Project: Untitled

Project Number:

NODE PROPERTIES					
Label	x (m)	y (m)	Restraint Fx	Restraint Fy	Restraint Rz
1	0,000	0,000	X Translation	Y Translation	Free
2	4,000	0,000	X Translation	Y Translation	Rotational
3	0,000	4,000	Free	Free	Free
4	4,000	4,000	Free	Free	Free

FRAME ELEMENT PROPERTIES						
Frame Definitions						
Label	Node 1	Node 2	Material	Section	Offset Start (m)	Offset End (m)
1	1	3	Steel	H Section(Major)	0,000	0,000
2	2	4	Super Steel	H Section(Major)	0,000	0,000
3	3	4	Steel	H Section(Major)	0,000	0,000

Frame Releases						
Label	Node 1 Releases			Node 2 Releases		
	Tx	Ty	Rz	Tx	Ty	Rz
1	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed
2	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed
3	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed	Fixed

 Company: \_\_\_\_\_ Date: 02-ivl-2022  
Project: Untitled Project Number: \_\_\_\_\_

LOAD CASES		
<b>Linear Static Load Cases</b>		
Name	Include Self Weight	Self Weight Factor
Load case 1	No	1,00
Self weight	Yes	1,00

DEMO VERSION - Not for commercial use

Company: Date: 02-ivi-2022

Project: Untitled Project Number :

---

**LOAD ASSIGNMENTS**

---

**FRAME TRAPEZOIDAL LOAD ASSIGNMENTS**

---

Load case: Load case 1

Frame	Cord. System	Direction	Loc 1 (m)	Load 1 (kN/m)	Loc 2 (m)	Load 2 (kN/m)
2	Local	Y	0,000	5,00	4,000	0,00

---

**FRAME SPAN LOAD ASSIGNMENTS**

---

Load case: Load case 1

Frame	distance	Px (kN)	Py (Force_strin	Mz (kNm)
3	1,000	0,00	-40,00	0,00

DEMO VERSION - Not for commercial use



	Company:	Date: 02-svi-2022
	Project: Untitled	Project Number:
<b>CALCULATION PARAMETERS</b>		
Shear deformation effects:	No (Euler Beam Theory)	
Rigid offset stiffness factor:	10000.00	

DEMO VERSION - Not for commercial use



Company:

Date: 02-svl-2022

Project: Untitled

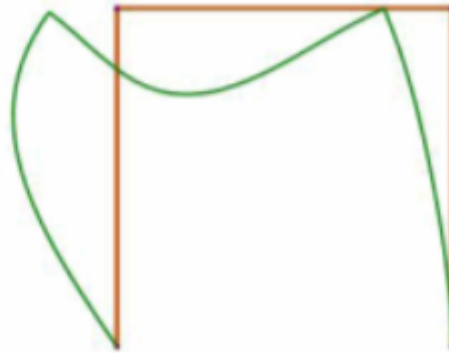
Project Number:

**B. ANALYSIS RESULTS**

**FRAME DIAGRAMS**

Load case: Load case 1

**DEFORMED SHAPE**



DEMO VER.



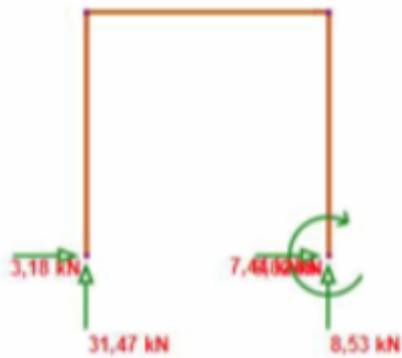
Company:

Date: 02-ivi-2022

Project: Untitled

Project Number:

## SUPPORTS REACTIONS



## AXIAL FORCE DIAGRAM





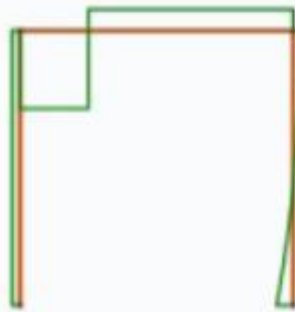
Company:

Date: 02-svi-2022

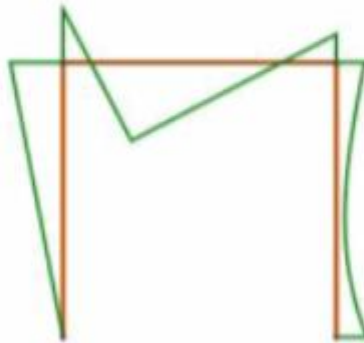
Project: Untitled

Project Number:

SHEAR FORCE DIAGRAM



BENDING MOMENT DIAGRAM





Company:

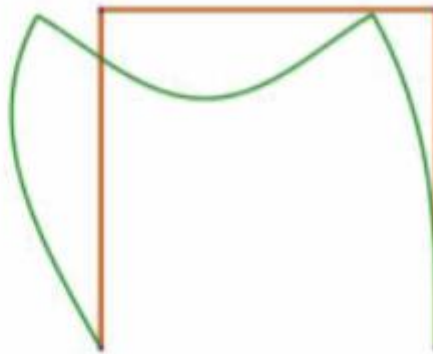
Date: 02-ivi-2022

Project: Untitled

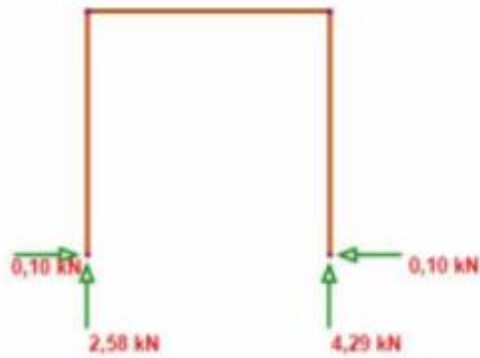
Project Number:

Load case: Self weight

DEFORMED SHAPE



SUPPORTS REACTION S





Company:

Date: 02-svi-2022

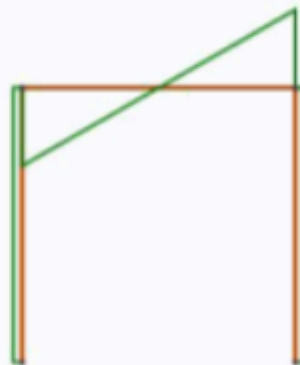
Project: Untitled

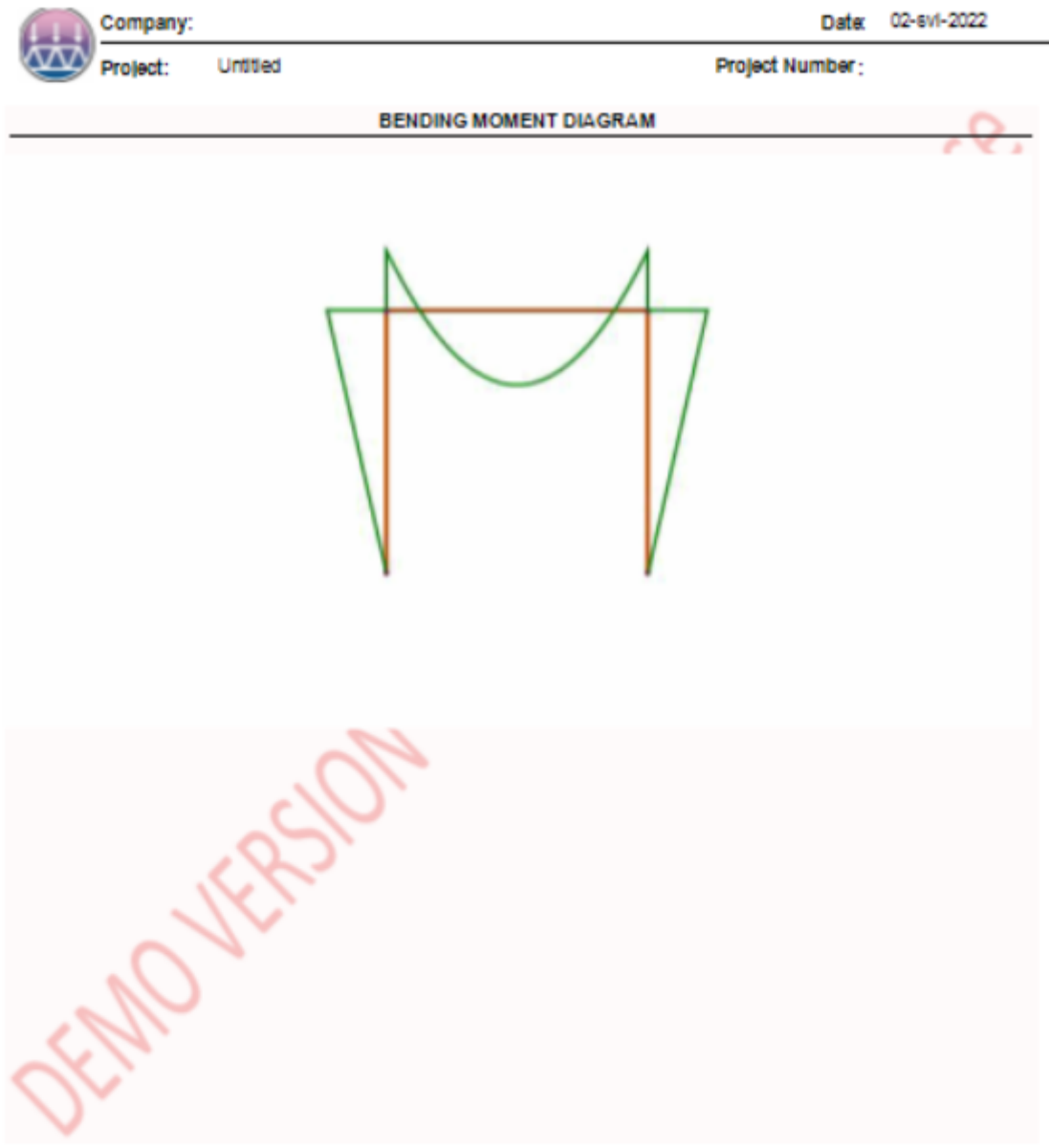
Project Number:

AXIAL FORCE DIAGRAM



SHEAR FORCE DIAGRAM





Company: Date: 02-svl-2022

Project: Untitled Project Number:

---

**SUPPORT REACTIONS**

Node reactions

Load case: Load case 1


Node	Fx (kN)	Fy (kN)	Mz (kNm)
1	3,18	31,47	0,00
2	6,82	6,53	-7,44

Load case: Self weight

Node	Fx (kN)	Fy (kN)	Mz (kNm)
1	0,10	2,58	0,00
2	-0,10	4,29	0,00

DEMO VERSION - Not for commercial use





Company: \_\_\_\_\_ Date: 02-ivi-2022

Project: Untitled Project Number: \_\_\_\_\_

Total reactions

Load case: Load case 1

Fx (kN)	Fy (kN)	Mz (kNm)
10,00	40,00	26,67

Load case: Self weight

Fx (kN)	Fy (kN)	Mz (kNm)
0,00	6,87	17,17

DEMO VERSION - Not for commercial use

Company: Date: 02-svi-2022

Project: Untitled Project Number:

---

NODAL DISPLACEMENTS			
<b>Load case: Load case 1</b>			
Node	dx (mm)	dy (mm)	rz (rad)
1	0,0	0,0	0,001557
2	0,0	0,0	0,000000
3	-1,9	-0,1	-0,001706
4	-1,9	0,0	0,000975
<b>Load case: Self weight</b>			
Node	dx (mm)	dy (mm)	rz (rad)
1	0,0	0,0	0,000049
2	0,0	0,0	0,000000
3	-0,1	0,0	-0,000049
4	-0,1	0,0	0,000049

DEMO VERSION - Not for commercial use

Company:		Date: 02-svi-2022		
Project: Untitled		Project Number:		
<b>FRAME FORCES</b>				
<b>Load case: Load case 1</b>				
Frame	Location (m)	Axial Force (kN)	Shear Force (kN)	Bending Moment (kNm)
1	0,00	-31,47	-3,18	0,00
1	4,00	-31,47	-3,18	-12,72
2	0,00	-8,53	-6,82	7,44
2	1,74	-8,53	0,00	2,05
2	4,00	-8,53	3,18	6,83
3	0,00	-3,18	31,47	-12,72
3	1,00	-3,18	31,47	18,75
3	2,00	-3,18	-8,53	10,23
3	4,00	-3,18	-8,53	-6,83
<b>Load case: Self weight</b>				
Frame	Location (m)	Axial Force (kN)	Shear Force (kN)	Bending Moment (kNm)
1	0,00	-2,58	-0,10	0,00
1	4,00	-0,86	-0,10	-0,38
2	0,00	-4,29	0,10	0,00
2	1,74	-2,80	0,10	0,17
2	4,00	-0,86	0,10	0,38
3	0,00	-0,10	0,86	-0,38
3	1,00	-0,10	0,43	0,26
3	2,00	-0,10	0,00	0,48
3	4,00	-0,10	-0,86	-0,38



Company:

Date: 02-svi-2022

Project: Untitled

Project Number:

## FRAME DEFORMATIONS

## Load case: Load case 1

Frame	Location (m)	ux (mm)	uy (mm)	rz (rad)
1	0,00	0,0	0,0	0,001557
1	4,00	-0,1	-1,9	-0,001706
2	0,00	0,0	0,0	0,000000
2	1,74	0,0	-0,5	0,000420
2	4,00	0,0	-1,9	0,000975
3	0,00	-1,9	0,1	-0,001706
3	1,00	-1,9	2,0	-0,001319
3	2,00	-1,9	2,3	0,000538
3	4,00	-1,9	0,0	0,000975

## Load case: Self weight

Frame	Location (m)	ux (mm)	uy (mm)	rz (rad)
1	0,00	0,0	0,0	0,000049
1	4,00	0,0	-0,1	-0,000049
2	0,00	0,0	0,0	0,000000
2	1,74	0,0	0,0	0,000009
2	4,00	0,0	-0,1	0,000049
3	0,00	-0,1	0,0	-0,000049
3	1,00	-0,1	0,1	-0,000052
3	2,00	-0,1	0,1	0,000000
3	4,00	-0,1	0,0	0,000049